随机微分方程理论及其应用

泽夫·司曲斯 著

刘永才

毛士忠

钮晓鸣 译

王寿仁 校

上海科学技术文献出版社

Theory and Applications of
Stochastic Differential Equations

ZEEV SCHUSS

John Wiley & Sons
New York. Chichester. Brisbane. Toronto

随机微分方程理论及其应用

泽夫·司曲斯 著
刘永才
毛士忠
钮晓鸣 译
王寿仁 校

上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路 2 号)
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.5 字数 254,000
1986 年 9 月第 1 版 1986 年 9 月第 1 次印刷
印数: 1—4,000

书号: 13192·91 定价: 2.15 元

《科技新书目》122-224

内 容 简 介

本书介绍了伊藤型随机微分方程的起源、基本理论和应用．全书分两大部分．第一部分是基本理论篇，包括前七章．其中第一、二章叙述概率论基础知识、布朗运动．第三、四、五章叙述伊藤型随机微积分、随机微分方程，建立了随机过程与扩散过程、随机微分方程与偏微分方程之间的联系，此外还叙述了随机微分方程的解的稳定性．第六、七章叙述随机微分方程的渐近分析、离出问题与奇异摄动方法．第二部分是应用篇，包括后三章．其中第八章阐述了随机微分方程在化学反应中的扩散过程、晶体中的原子迁移等方面的应用．第九章讨论了滤波理论及其在通信系统中的应用．第十章介绍了经典力学与偏微分方程中的有关课题．

本书可作为大专院校应用数学、控制论、现代通信、生物物理等专业的高年级学生、研究生的选修课教材，也可供有关领域中的研究人员、科技工作者、大专院校教师自学参考．

译　　序

随机微分方程是一门新兴边缘学科．自伊藤于1961年首次发表"论随机微分方程"[注]一文以来，得到了广大理论科学工作者和实际应用科技人员的重视，特别近十年来已发展成为概率论中一个重要分支．由于其理论严谨，基础深厚，使得人们在学习、掌握、推广和应用这门学科时受到了一定的限制．当前，由于随机微分方程已飞速、广泛地渗透于自然科学、工程技术的很多领域中，例如分子物理学、原子物理学、化学动力学、固态扩散、结构稳定性和群体遗传学等多个方面，故而近年来，已有多种专业书籍相继问世．该书采用奇异摄动方法来研究首次通过问题，阐述伊藤公式的应用、随机微分方程的渐近分析以及在许多领域中的应用．由于该书内容深入浅出，推导精练，故而更易被广大科技工作者、高等院校师生较快地掌握和运用．我们翻译这本书的目的在于向国内对这一领域有兴趣的读者介绍随机微分方程的主要内容．对于通晓这一领域的专业工作者，该书也可以作为应用的参考书．书末附有索引和96篇参考文献，可供查阅．穿插在不同章节中的213个习题在阅读时应予以重视，因为有些习题的推导方法和结论贯串于全书内容中，有些习题的结果则是有关文献的成果．

本书第一、二、三、四章由上海科学技术大学刘永才翻译，第五、六、七章由盐城师范专科学校毛士忠翻译，前言、第八、九、十

[注]　On stochastic differential equations, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 4 (1961) ——译者注

章及附录由上海651所钮晓鸣翻译，其中第八、九章的翻译得到了钮旋的帮助。译者都相互校阅了译稿，最后由刘永才统稿。全书由中国科学院应用数学研究所王寿仁同志校对。对原书中的明显错误，我们已作了纠正。由于时间仓促，译者学术水平有限，尚有不完善之处，望广大读者提出宝贵意见。

译　者

1984.6 于上海

前　　言

本书的目的是为了阐明伊藤(Itô)型随机微分方程的起源、理论及其应用．所谓伊藤型随机微分方程就是指带有白噪声的微分方程，本书给出了它的基本理论以及广阔的应用范围．本书的主题是用现代奇异摄动方法来研究首次通过问题，以及它在科学的各个领域中的作用．因此，本书对于那些精通于经典分析而在现代概率论和测度论方面感到欠缺的应用数学工作者、物理学家、化学家和工程师们来说是非常适用的．本书的预备知识是高等微积分、常微分方程和偏微分方程的基本理论，当然也应具备初等概率论的基础知识．从事概率论研究的专家将会发现，本书中关于计算首次通过时间、转移概率和离出概率以及其他一些有趣的量方面有一些新的分析方法．本书特别强调在许多科学领域内的现象用随机微分方程去建立模型．例如化学动力学、固态扩散、遗传学、噪声中信号的滤波等现象的模型．

自从爱因斯坦建立了布朗运动和分子扩散的数学理论以来，在各种不同的领域内，如分子物理学、原子物理学、化学动力学、固态理论、结构稳定性、群体遗传学、通信以及自然科学、社会科学和工程的许多其他分支中开展了应用这一理论的科学研究．在随机微分方程理论研究的早期阶段，爱因斯坦、斯莫路苏斯基(Smoluchowski)、朗之万(Langevin)、奥伦斯坦(Ornstein)、乌伦贝克(Uhlenbeck)和克拉美(Kramers)等人做了许多卓有成效的工作，这些工作综合在查德锐赛卡(Chandrasekhar)

1943年的主要论文中．近二十五年来，随机微分方程的数学理论大大地发展了，一些非常严谨的教科书相继问世，数学研究人员在这一领域中发现了一些极其重要的结果，尤其突出的是导出了关于首次通过时间和离出分布的方程．随着伊藤和斯特拉脱诺维奇(Stratonovich)微积分概念的引入，随机微分方程的理论更向纵深发展．不幸的是，由于数学理论与问题的起源之间的鸿沟日益加深，从而使得物理学家、化学家和工程师们对于现代的数学技巧显得生疏了，而数学家们对于理论的起源和应用显得生疏了．由于这一理论的复杂性和数学的严密性以致无法对非专业人员编写这类数学教科书，本书的目的就是试图填补这一鸿沟．

第一章和第二章是概率论的有关知识和布朗运动的结构，第三章的一部分是伊藤、斯特拉脱诺维奇积分学和微分学的理论[注]．对于数学上有进一步严密性要求的内容已分别置于标有星号的各章节中，在第一次阅读本书时这些章节可以跳过．第三章的另一部分及第四、五章是随机微分方程的基本理论．对于书中的习题也应予以重视，因为它们包括了许多随机微分方程理论的经典应用，特别在习题中包括了爱因斯坦和斯莫路苏斯基扩散理论及其应用．第四章一方面建立了马尔可夫(Markov)过程与扩散过程之间的联系，另一方面还建立了马尔可夫过程与随机微分方程解之间的联系，第五章说明了随机微分方程和偏微分方程之间的关系．推导出了福克尔(Fokker)–普朗克(Planck)、柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)、邓肯(Dynkin)、费恩曼(Feynman)和卡西(Kac)的基本方程并对其边界状态进行了讨论．通过伊藤微积分，提出了运用偏微分

[注] 原书把这部分内容归纳在第二章中，而这些内容是在第三章——译者注

方程处理首次通过问题的方法．本书的主要贡献是第六章到第九章．第六章是随机微分方程的渐近理论以及它在统计力学、输运理论和数学遗传学中的应用．第七章中运用了新的方法来处理由斯莫路苏斯基-克拉美理论提出的奇异摄动问题，这个新方法是由马特库斯基（Matkowsky）和我本人提出的．第八章是随机微分方程理论的物理应用，给出了化学反应、扩散和离子晶体中传导性的数学模型．第九章主要讲了状态空间中滤波理论的要点，阐明了首次通过时间的作用．最后，第十章包括了气体分子运动论的斯莫路苏斯基理论，同时对经典力学以及偏微分方程理论中的一些基本概念作了简短的回顾．用统一的数学处理，许多问题化为通过解偏微分方程的奇异摄动边值问题来确定首次离出时间的期望．本书中所提出的奇异摄动方法可以导出有意义的概率量和由此得出物理量的明显表达，如阿尔海纳斯（Arrhenius）定律中的位阻因素、多级化学反应中的反应速率、晶体中原子迁移的扩散张量、离子晶体中的导电性、调频滤波器中的"卡搭"噪声等．我希望本书能提供给科学工作者一种新颖的数学工具，并且使得数学工作者对于随机微分方程理论在科学中所起的作用有更深入的了解，从而能使随机微分方程的数学理论与自然科学之间的差距得以弥补．

（谢辞略．）

泽夫·司曲斯

1980 年

目　　录

第一章 概率论复习

1.1 事件和样本空间

考虑一枚均匀硬币抛掷三次的试验. 该试验的可能结果是 HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH 和 TTT, 其中 H 表示正面, T 表示背面. 试验的每一可能结果称为**基本事件**. 这样, 在一枚硬币抛掷三次的试验中有八个基本事件. 更复杂的事件可以表示为基本事件的集合. 这样, 在硬币抛掷的试验中, 事件"两次或更多次正面朝上", 它由基本事件 HHH, HHT, HTH, THH 组成, 我们用 D 表示, 即

$$D=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\}.$$

一个试验的所有基本事件组成的集合 Ω 称为**样本空间**, 每一基本事件用 ω 表示, 称为 Ω 中的一个点. 对上面考虑的特定例子, 有

$$\Omega=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{HTT},\ \mathrm{TTT}\}.$$

记号 $\omega\in\Omega$, 读为"ω 是 Ω 中的一个点(或 Ω 的一个元素)". 由基本事件组成的任一事件 A 是 Ω 的一个子集. 特别, 不可能事件 $\emptyset$, 即不包含基本事件的事件称为空集. 令 A 和 B 是 Ω 中的事件, 如果 A 的每一元素也是 B 的元素, 称 A 是 B 的子集, 记为 $A\subset B$. 显然 $A\subset\Omega$, $\emptyset\subset A$ 和 $A\subset A$. 例如, 在硬币抛掷试验中, 集合 D 是"至少有一次正面朝上"的集合(事件) E 的子集. 明确地说,

$$\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\} = D \subset E$$
$$= \{\mathrm{HHH},\ \mathrm{THH},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{HTT}\}.$$

称 Ω 的两个子集 A 和 B 相等，即表示它们由相同元素组成，亦即如果 $A \subset B$ 和 $B \subset A$，则 $A = B$. 称 Ω 的两个子集（两个事件）A 和 B 互不相交，表示它们没有公共元素. 这样，在硬币抛掷试验中，"至少两次背面朝上"的集合 F 和集合 D 是互不相交集. 但是，集合 E 和 F 却不是互不相交的.

通常，样本空间包含无限多个点（基本事件）. 例如，考虑热平衡中由几个质量为 m 的分子组成的单原子气体的分子速度的抽样试验. 令 $\mathbf{v}_i = (v_i^1,\ v_i^2,\ v_i^3)^T (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是进行试验瞬间的分子速度向量. 假设气体是理想的，那么可忽略分子间引力势能. 用 E 表示气体的总能量，有

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{v}_i|^2 = \frac{2E}{m},$$

其中 $|\mathbf{v}_i|^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{3} v_i^j v_i^j$. 由于假设 E 为常数，因此试验的任意结果是半径为 $(2E/m)^{1/2}$ 的 $3n$ 维球面 S 上的一点. 我们可以认为该试验的样本空间就是球面 S 上的所有点的集合. 例如把"$\mathbf{v}_i$ 的第一分量满足不等式 $a < v_i^1 < b$"这一事件记为 G，则集合 G 是 S 上的球带.

给定样本空间 Ω 的两个子集 A 和 B，$A \cup B$ 表示 Ω 的一个子集，它的元素或属于 A 或属于 B. 集合 $A \cup B$ 称为 A 和 B 的并. 一般，给定 Ω 的子集的有限或无限序列 $\{A_j\}$，$j = 1,\ 2,\ \cdots$，用

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_j A_j$$

表示其元素至少属于集合 A_j 中一个的集合. 所以，如果至少有一个事件 $A_j (j = 1,\ 2,\ \cdots)$ 发生，事件 $\bigcup_j A_j$ 发生. 集合 $A = \bigcup_j A_j$

称为集合 A_j 的并. 显而易见, $A\cup A=A$, $A\cup\Omega=\Omega$ 和 $A\cup\emptyset=A$. 如果 $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$, 那么集合 $A-B$ 是由 A 中那些不在 B 中的元素组成. 集合 $A-B$ 称为 A 和 B 的差. 这样,在硬币抛掷例子中有

$$E-D=\{\text{HTT, THT, TTH}\},$$

即 $E-D$ 是事件"恰有一次正面朝上", 所以如果 E 发生而 D 不发生, 则 $E-D$ 发生. 同样有 $D-E=\emptyset$. 显然, $A-\emptyset=A$, $A-A=\emptyset$ 和 $A-\Omega=\emptyset$. 如果 A 和 B 是互不相交事件, 那么 $A-B=A$. 给定 Ω 的子集的有限或无限序列 $\{A_j\}$, $j=1, 2, \cdots$, 用

$$A=A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap_j A_j$$

表示其元素属于所有集合 A_j, $j=1, 2, \cdots$, 的集合. 集合 $A=\bigcap_j A_j$ 称为集合 A_j 的交. 如果所有事件 A_j, $j=1, 2, \cdots$ 发生, 则事件 $\bigcap_j A_j$ 发生. 显然, $A\cap A=A=A\cap\Omega$, $A\cap\emptyset=\emptyset$; 如果 $A\subset B$, 那么 $A\cap B=A$. 这样, 在硬币抛掷例子中, $E\cap D=D$. 显然, 两个集合 A 和 B 互不相交当且仅当 $A\cap B=\emptyset$. 如果 $A\subset\Omega$, 用 A^c 表示差 $\Omega-A$. 集合 A^c 称为 A 在 Ω 中的补. 它包含 Ω 中那些不属于 A 的所有元素. 这样, 在硬币抛掷例子中, 集合 D^c 是事件"在硬币抛掷三次中至多一次正面朝上", 我们有

$$D^c=\{\text{TTT, TTH, THT, HTT}\}.$$

在单原子气体的例子中, 集合 G^c 是由 S 上球带 G 外的所有点组成.

习题 **1.1.1**

(i) 构造对应于抛掷一颗骰子的试验的样本空间 Ω.

(ii) Ω 中有多少个基本事件?

(iii) Ω 中由两个基本事件组成的事件有多少?

习题 1.1.2

令样本空间由 n 个基本事件组成.

(i) 恰由 Ω 中 k 个基本事件组成的事件的数目是多少?

(ii) Ω 中所有事件的数目是多少?

习题 1.1.3

在家庭调查的随机抽样中，如果被抽样的家庭只有一个孩子，则说事件 A 发生，如果家庭中至少有一个孩子，则说事件 B 发生. 已知没有一个家庭的孩子多于 n 个. 问基本事件是什么? 将事件 A 和 B 用基本事件表示并描述事件 $A\cup B$, A^c, B^c, $B-A$ 和 $A-B$.

习题 1.1.4

在单原子气体模型中，令事件 A 和 B 给定为 $A=\{a<v_1^2<b\}$, $B=\{c<v_1^2<d\}$. 用几何图形描述事件 $A\cup B$, $A\cap B$ 和 $(A-B)\cup(B-A)$.

习题 1.1.5

证明德·摩根 (de Morgan) 定律: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

1.2 概率测度

在一枚均匀硬币抛掷三次的试验中，对于八个可能结果中的每一个直观地赋予概率 $\frac{1}{8}$，因为它们机会均等. 对于事件 D，赋予概率 $\frac{1}{2}$，因为它包含 Ω 中所有可能事件的一半. 显然,

对于不可能事件 $\emptyset$ 赋予概率 0，对于必然事件 Ω 赋予概率 1. 为了给出直观的概率概念的精确数学定义，我们引进公理系统，它能刻划我们希望概率所具备的基本性质. 首先描述由随机事件构成的集合 $\mathscr{B}$，而概率测度则定义在 $\mathscr{B}$ 上. $\mathscr{B}$ 的元素是 Ω 的子集，$\mathscr{B}$ 有下列性质：

(i) $\Omega\in\mathscr{B}$.

(ii) 如果 $A\in\mathscr{B}$, $B\in\mathscr{B}$，那么 $A-B\in\mathscr{B}$.

(iii) 如果 $A_j\in\mathscr{B}$, $j=1, 2, \cdots$, 是 $\mathscr{B}$ 的一个元素序列，那么 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathscr{B}$.

特别，随机事件的补和交是随机事件. 概率测度 $P(\cdot)$ 是定义在随机事件构成的集合 $\mathscr{B}$ 上的函数，它满足下列公理：

公理 1 对于 $\mathscr{B}$ 的每一元素 A 对应一个数 $P(A)$，它满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

公理 2 $P(\Omega)=1$.

公理 3 如果 $A_j\in\mathscr{B}$, $j=1, 2, \cdots$，是互不相交事件的有限或无限序列，即如果 $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\emptyset$，那么

$$P(\bigcup_j A_j)=\sum_j P(A_j).$$

为了说明这些公理，再次考虑一枚均匀硬币抛掷三次的试验. 样本空间由八个基本事件组成，$\mathscr{B}$ 由 Ω 的所有子集组成. 容易看出性质(i)～(iii)都满足. 对于 $\mathscr{B}$ 中每一随机事件，赋予概率如下：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中元素数目}}{8}.$$

容易验证，在这种情况下，公理 1～3 都满足. 在单原子气体运动的例子中，基本事件与半径为 $(2E/m)^{1/2}$ 的球面 S 上的点相

同. 我们期望 S 中事件 G 的概率与 G 的面积成正比. 例如, 对于 $G=\{a<v_i^1<b\}$, 经初等演算给出

$$P(G)=c\int_a^b\left(1-\frac{x^2m}{2E}\right)^{(3n-3)/2}dx, \qquad (1.2.1)$$

其中 c 是比例常数. 因为由公理 2, $P(S)=1$, 故必有

$$c=\frac{1}{\int_{-(2E/m)^{1/2}}^{(2E/m)^{1/2}}(1-x^2m/2E)^{(3n-3)/2}dx}.$$

S 中随机事件集合 $\mathscr{B}$ 不能取为 S 的所有子集所构成的集合, 因为可以证明不存在定义在由 S 的所有子集 A 所组成的集合上的函数 $P(A)$ 使其满足(1.2.1)式且公理 1~3 成立. 这由于 S 上存在不可测集合的结果所致[35]. 集合 $\mathscr{B}$ 定义为包含所有事件 $\{a<v_i^j<b\}$, 其中 $i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, 3$; $-2E/m\leqslant a<b\leqslant 2E/m$ 且具有性质 (i)~(iii) 的最小集合. 这样, 每当 S 的子集 A 的面积能确定时, 即令

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}P(G)$ 就得到众所周知的麦克斯韦(Maxwell)结果: 假设能量正比于气体中的质点数, 令 $E=\gamma n$, 其中 γ 是一个与 n 无关的常数, 由此,

$$P\{a<v_i^1<b\}=\frac{\int_a^b\left(1-\frac{x^2m}{2\gamma n}\right)^{(3n-3)/2}dx}{\int_{-(2\gamma n/m)^{1/2}}^{(2\gamma n/m)^{1/2}}(1-x^2m/2\gamma n)^{(3n-3)/2}dx}$$

$$\to\left(\frac{3m}{4\pi\gamma}\right)^{1/2}\int_a^b e^{-3mx^2/4\gamma}dx.$$

令 $\gamma=3kT/2$, 得到麦克斯韦结果:

$$\lim_{n\to\infty}P\{a<v_i^1<b\}=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\int_a^b e^{-mx^2/2kT}dx.$$

T 称为绝对温度，k 称为玻尔兹曼(Boltzman)常数. 考虑一个稍为复杂的例子：正面和背面的游戏. 该游戏的可能结果是 H 和 T 的所有无限序列. 这样，样本空间 Ω 是所有序列 A_1, A_2, …, 的集合，其中每一 A_j 或是符号 H 或是符号 T. 这种不同的序列存在无限多个，事实上，甚至 Ω 的元素不能排成序列，即集合 Ω 是不可数的[48]. 如果对游戏的每一结果赋予概率测度，必定有 $P(\{A_1, A_2, \cdots\})=0$. 因为显然所有序列必定有相同概率，如果 $P(\{A_1, A_2, \cdots\})=c>0$，那么，对任意不同结果的序列 $A^i=\{A_1^i, A_2^i, \cdots\}$, $i=1, 2, \cdots$, 有 $A^i\cap A^j=\emptyset$; 因而由公理 3

$$P(\bigcup_j A^j)=\sum_j P(A^j)=\sum_j c=\infty,$$

这违反公理 1. 因此，我们取位数 $k(k=1, 2, \cdots)$ 固定的序列的集合为基本事件. 显然，k 位固定的基本事件的概率是一枚均匀硬币抛掷 k 次试验的一个结果的概率. 所以，这样的基本事件的概率测度应是 $1/2^k$. 为了构造 Ω 上的概率测度，使它赋予 k 位固定的基本事件概率为 $1/2^k$，我们可将 Ω 映射到单位区间上，对每个序列 A_1, A_2, …对应一个数 t:

$$t=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon_n, \tag{1.2.2}$$

其中 $\varepsilon_n=1$，若 $A_n=\text{H}$; $\varepsilon_n=0$，若 $A_n=\text{T}$. 显然，$0\leqslant t\leqslant 1$. 这种对应不是一对一的. 由于

$$2^{-1}=\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n},$$

所以序列 H, T, T, … 和 T, H, H, … 映射到同一数，即数 $\frac{1}{2}$. 映射到相同数的序列对应"双值有理数"，即对应形为 $r/2^s$ 的数，这里 r 和 s 是正整数. 容易看到，所有这种数的集合可以排成一个序列(怎样排?) $A=[A^1, A^2, \cdots]$(即此集合是可数的). 由于 $P(A^j)=0$，且 $i\neq j$ 时 $A^i\cap A^j=\emptyset$，由公理 3 必有 $P(A)=0$.

如果认定所有双值有理数与以 T, T, …, 为尾的序列相同，就得到 Ω 和区间 [0, 1] 的一一对应。这样，基本集合 $B_1=\{H, A_1, A_2, \cdots\}$ 映射到区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$，该区间是区间 [0, 1] 中二进制展开式第一位数字是 1 的所有数组成的集合。事件 B_1 对应一枚均匀硬币抛掷一次其结果是 H，这样，我们赋 B_1 概率为 $\frac{1}{2}$。在 Ω 和区间[0, 1]的一一对应中，此概率是对应于 B_1 的区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 的长度。容易看到任何基本事件映射到区间的有限个并上，这些区间的端点是双值有理数，这种基本事件的概率等于它映射到的双值区间的长度和，现在也容易构造 Ω 上的概率测度，使它和赋予基本事件的概率测度一致。简单地对任意区间 $[a, b]\subset[0, 1]$ 给予长度 $b-a$，由性质(i)～(iii)将定义扩充到随机事件集合 $\mathscr{B}$ 上[35]。在上面描述的一一对应下，Ω 中随机事件集合 $\mathscr{B}$ 可以用它在区间[0, 1]中的象来描述。区间[0, 1]中 $\mathscr{B}_\Omega$(Ω 中随机事件构成的集合) 的象称为波莱尔 (Borel) 集 $\mathscr{B}$，它是包含所有 [0, 1] 子区间且具有性质(i)～(iii)的最小集合。

运用概率测度的公理3，可以导出公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (1.2.3)$$

事实上，

$$A\cup B=A\cup[B-(A\cap B)],$$

$$B=[A\cap B]\cup[B-(A\cap B)].$$

显然

$$\emptyset=A\cap[B-(A\cap B)]$$

和

$$\emptyset=[A\cap B]\cap[B-(A\cap B)].$$

因而，由公理 3，

$$P(A\cup B)=P(A)+P[B-(A\cap B)]$$

和 $$P(B)=P(A\cap B)+P[B-(A\cap B)].$$
由此得到(1.2.3)式成立。

习题 1.2.1[39]

令 $H_n(\omega)$是正面和背面游戏中序列 $\omega=\{A_1, A_2, \cdots\}\in\Omega$ 前 n 个元素内 H 的数目。运用恒等式

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n}\sum_{|k-n/2|<a\sqrt{n}}\binom{n}{k}=(2\pi)^{-1/2}\int_{-2a}^{2a}e^{-x^2/2}dx \qquad (1.2.4)$$

证明 $$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|H_n-\frac{n}{2}\right|<a\sqrt{n}\right\}=(2\pi)^{-1/2}\int_{-2a}^{2a}e^{-x^2/2}dx.$$
运用此结果设计一个试验,以示硬币抛掷结果的合理性。

习题 1.2.2

运用斯特林(Stirling)公式[22],证明(1.2.4)式。

习题 1.2.3

令 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 3)$是随机事件。证明

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)-\sum_{\substack{j,k=1\\j<k}}^{n}P(A_j\cap A_k)+\sum_{\substack{i,j,k=1\\i<j<k}}^{n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n+1}P\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right) \quad \text{(朋加莱 (Poincaré公式))}.$$

习题 1.2.4

证明 $$P(A)+P(A^c)=1.$$

习题 1.2.5

令$\{A_n\}$, $n=1, 2, \cdots$,是一个递增的随机事件序列,即 $A_n\subset A_{n+1}$。证明

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

习题 1.2.6

令 $\{A_n\}$, $n=0, 1, \cdots$, 是 Ω 中所有基本事件的序列，假设 $P(A_n)=c/n!$, $n=0, 1, \cdots$, 求 c.

习题 1.2.7

令 $\{A_n\}$, $n=1, 2, \cdots$, 是递减的随机事件序列，即 $A_{n+1}\subset A_n$. 证明

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

习题 1.2.8

证明：如果 $A\subset B$, 那么 $P(A)\leqslant P(B)$.

习题 1.2.9

一枚均匀硬币 n 次抛掷中有 m 次正面朝上的概率是多少?

习题 1.2.10*

证明波莱尔-康特立 (Borel-Cantelli) 引理：令 $\{A_n\}$ 是一个无限的事件序列，使得 $\sum_n P(A_n)<\infty$. 那么 $P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)=0$. 集合 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ 称为"A_n 无限多次出现" (A_n i.o.). 我们有 $\omega\in(A_n\text{ i.o.})$ 当且仅当对某个序列 $m_n\to\infty$, 有 $\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m_n}$. 部分逆亦真[24].

1.3 条件概率和独立性

考虑一个试验，我们重复 n 次，设 $m(m\leqslant n)$ 次事件 B 发生，$k(k\leqslant n)$ 次事件 A 发生. 事件的频率给定为 $p(A)=k/n$ 和 $p(B)=m/n$. 如果事件 $A\cap B$ 出现 $l(l\leqslant m)$ 次，那么在 B 发生下，A 发生的频率是 $p(A|B)=l/m$. 因为

我们有
$$\frac{l}{m}=\frac{l/n}{m/n}=\frac{p(A\cap B)}{p(B)},$$
$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}.$$
运用此关系式，当 $P(B)>0$ 时，定义条件概率 $P(A|B)$ 为
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{1.3.1}$$
函数
$$P_B(A)=P(A|B) \tag{1.3.2}$$
是 B 中概率测度，其中 B 现考虑为一个较小的样本空间. 测度 $P(A|B)$ 是假定 B 发生情况下，事件 A 的概率. 为了证明(1.3.2)式中 $P_B(A)$ 是样本空间 B 上的概率测度，我们首先描述 B 中随机事件集. 如果 A 是 Ω 中随机事件，称 $A\cap B$ 是 B 中随机事件，这样 B 中随机事件是 Ω 中随机事件与 B 的交. 容易看到，B 中随机事件集满足性质(i)～(iii). 为了验证 $P_B(\cdot)$ 满足公理 1～3，首先注意到，由于 $A\cap B\subset B$，由习题 1.2.8 有 $P(A\cap B)\leqslant P(B)$，因而
$$0\leqslant P_B(A)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\leqslant 1,$$
所以公理 1 成立. 显然，$P_B(B)=P(B|B)=P(B\cap B)/P(B)=1$，所以公理 2 成立. 最后，令 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\emptyset$，因为 $(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=\emptyset$，那么
$$P_B(\bigcup_j A_j)=\frac{P[(\bigcup_j A_j)\cap B]}{P(B)}=\frac{P[\bigcup_j(A_j\cap B)]}{P(B)}$$
$$=\frac{\sum_j P(A_j\cap B)}{P(B)}$$
$$=\sum_j P(A_j|B)=\sum_j P_B(A_j),$$
由此得到公理 3.

习题 1.3.1

证明

(i) $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$.

(ii) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$.

习题 1.3.2

假设如果 $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\emptyset$ 且 $\bigcup_j A_j=\Omega$, 其中 $\{A_j\}$ 是 Ω 中有限或无限的随机事件序列.

(i) 给定 $P(A_j)>0$, $j=1, 2, \cdots$, B 是 Ω 中任意随机事件, 证明全概率公式

$$P(B)=\sum_j P(A_j)P(B|A_j).$$

(ii) 证明贝叶斯(Bayes)公式: 在(i)的条件下, 如果 $P(B)>0$, 那么

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}.$$

习题 1.3.3

在正面和背面的游戏中, 给定 n 次抛掷中正面朝上的次数是 l, 求均匀硬币的前 m 次抛掷中正面朝上次数是 k 的概率($k\leqslant l$, $n>m$, $l\leqslant m$)[22].

习题 1.3.4

掷三颗骰子, 给定总点数是 10 的情况下, 其中一颗骰子是 4 的概率是多少?

如果事件 B 的发生不影响事件 A 发生的概率, 称 A 和 B 独立. 数学上, 此表示为

$$P(A|B)=P(A),$$

由(1.3.1)式, 在这种情况下, 我们得到

$$P(A\cap B)=P(A)P(B). \tag{1.3.3}$$

因而，如果(1.3.3)式成立，则称随机事件 A 和 B 独立。

习题 1.3.5

证明如果 $P(A|B)=P(A)$，那么 $P(B|A)=P(B)$。

如果对所有 $1\leqslant s\leqslant n$ 及所有的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$，有

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{s}A_{i_j}\Big)=\prod_{j=1}^{s}P(A_{i_j}),$$

我们称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是独立的．例如，令 A 是事件"一枚均匀硬币的第一次抛掷是正面朝上"，B 是事件"一枚均匀硬币的第二次抛掷是背面朝上"．显然，A 和 B 是独立的，因而概率为

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

习题 1.3.6

一枚均匀硬币的 n 次抛掷中至少有 k 次正面朝上的概率是多少？

如果无限事件序列 $\{A_j\}$, $j=1, 2, \cdots$, 的每一有限子序列是独立的，我们称它是独立的．作为一个例子，下面[89]考虑正面和背面的游戏．令 H_n 表示一枚均匀硬币前 n 次抛掷中正面朝上的次数．我们将计算概率

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{n}=\beta\Big), \tag{1.3.4}$$

其中 β 是任意数．事件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{n}=\beta \tag{1.3.5}$$

是所有序列 $\omega=\{A_1, A_2, \cdots\}$ 的集合，使得极限(1.3.5)式存在且等于 β. 运用映射(1.2.2)式，我们看到概率(1.3.4)式是在区间[0, 1]中数 t 的测度，使得 t 由(1.2.2)式给出，其中

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\varepsilon_m(t)}{n}=\beta.$$

事件 $\{\varepsilon_1(t)=1\}$ 是 Ω 中所有序列集合的映象，它的第一位是 H，所以它是[0, 1]中二进制展开式第一位数字是 1 的那些数所组成的集合. 这样，集合 $\{\varepsilon_1(t)=1\}$ 的映象是区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. 类似地，$\{\varepsilon_j(t)=1\}=\{$所有数 t，其第 j 位数字是 1$\}$. 显然，区间 [0, 1] 中这种集合的测度 μ 必为

$$\mu\{\varepsilon_j(t)=1\}=\mu\{\varepsilon_j(t)=0\}=\frac{1}{2},$$

其中对于任意$[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$有 $\mu([\alpha, \beta])=\beta-\alpha$. [$\mu(\cdot)$称为[0, 1]中勒贝格(Lebesgue)测度[35]]. 事件 $\{\varepsilon_j(t)=\eta_j\}$, $j=1, 2, \cdots$, $\eta_j=0$ 或 1 显然是独立的，因此

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\varepsilon_j(t)=\eta_j\}\right)=\prod_{j=1}^{n}\mu\{\varepsilon_j(t)=\eta_j\}=2^{-n}.$$

引进辅助函数 $r_i(t)=1-2\varepsilon_i(t)$，注意到

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j(t)}{n}=2\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j(t)}{n}\right).$$

事件 $\{r_j(t)=\zeta_j\}$, $j=1, 2, \cdots$, $\zeta_j=1$ 或 -1 也是独立的. 由于 $\varepsilon_j(t)$ 是阶梯函数，我们有

$$\mu\{\varepsilon_j(t)=1\}=\int_0^1\varepsilon_j(t)dt=\frac{1}{2},$$

因而 $\int_0^1 r_j(t)dt=0$. 由此得出，对所有 $i_1<i_2<\cdots<i_k$，有

$$\int_0^1\left(\prod_{j=1}^{k}r_{i_j}(t)\right)dt=\prod_{j=1}^{k}\left\{\int_0^1 r_{i_j}(t)dt\right\}=0, \qquad (1.3.6)$$

由(1.3.6)式,我们有

$$\int_0^1 \left\{\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\right\}^4 dt = \int_0^1 \left\{\sum_{j=1}^{n} r_j^4 + \sum_{i<j} r_i^2 r_j^2\right\} dt = n + 6\binom{n}{2}.$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left\{\frac{\left[\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\right]^4}{n^4}\right\} dt = \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-2}) < \infty,$$

由此得出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{j=1}^{n} r_j(t)]^4/n^4$ 对几乎所有 t, 即除掉测度为零的集合外收敛(由勒贝格单调收敛定理)[85]. 因而当 $n\to\infty$ 时,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j(t)}{n} = 2\left[\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(t)\right] \to 0$$

几乎处处成立. 所以,如果 $\beta=\frac{1}{2}$, 概率(1.3.4)式是 1, 其他是 0. 此例子说明了构造样本空间和概率测度的重要性.

1.4 随机变量

一维随机变量是定义在样本空间 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$, 使得对任意实数 x, 集合 $\{\omega | X(\omega) \leqslant x\}$ 是随机事件. 例如考虑正面和背面的游戏. 我们定义一个随机变量 $e_k(\omega)$, 如果序列 ω(ω 是 Ω 中由正面和背面组成的任意序列) 中第 k 次抛掷的结果是 H, 置 $e_k(\omega)=1$, 如果是 T, $e_k(\omega)=-1$. 集合 $\{\omega | e_k(\omega) \leqslant x\}$ 当 $-1 \leqslant x < 1$ 时是集合 $\{\omega | e_k(\omega) = -1\}$, 当 $x < -1$ 时是 $\emptyset$, 当 $x \geqslant 1$ 时是 Ω. 由第 1.2 节性质(i)~(iii), 集合 $\emptyset$ 和 Ω 显然是随机事件. 事件 $\{\omega | e_k(\omega) = -1\}$ 如第 1.2 节所定义的那样是 Ω 中基本事件, 这样 $e_k(\omega)$是随机变量. 容易看到随机变量的和是随机变量, 所以

$$X_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} e_j(\omega) \tag{1.4.1}$$

是随机变量，它表示 n 次抛掷后的"本钱"．另一种解释，从原点出发，如果 H 朝上，向右移动一步；如果 T 朝上，向左移动一步，那么 $X_n(\omega)$ 表示经过一枚硬币 n 次抛掷后，在 x 轴上随机游动的位置．事件 $\{X_n(\omega)=k\}$ 是所有可能序列（Ω 中所有点 ω）的集合，使得硬币 n 次抛掷后在 x 轴上随机游动 X_n 后到达点 k．我们删去符号 ω，用记号 $\{X_n=k\}$ 表示集合 $\{\omega|X_n(\omega)=k\}$．

习题 1.4.1

利用 $P(\varepsilon_k=1)=\frac{1}{2}$，证明当 n 和 k 有相同奇偶性时，

$$P(X_n=k)=\binom{n}{j}2^{-n}=[n!/(n-j)!j!]2^{-n},$$

其中 $j=(n-k)/2$，否则

$$P(X_n=k)=0.$$

令 X 是样本空间 Ω 上的随机变量．函数 $F(x)=P(X\leqslant x)=$[使得 $X(\omega)\leqslant x$，Ω 中点 ω 的集合（事件）的概率] 称为变量 X 的**分布函数**．显然，$F(x)$ 是 x 的非降函数，且

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

如果存在一个非负函数 $f(s)$ 使得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)ds,$$

那么 $f(x)$ 称为随机变量 X 的**概率密度函数**．当然我们有

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(x)dx.$$

如果随机变量的密度给定为

$$f(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

称它是高斯的或正态 $N(0,\ 1)$ 的．如果随机变量 $Y=(X-$

$m)/\sigma$ 是正态 $N(0, 1)$的，其中 σ 是正数，称随机变量 X 是正态 $N(m, \sigma)$的。

习题 1.4.2

证明随机变量 X 是正态 $N(m, \sigma)$的，如果它的密度给定为

$$f(x)=\frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

习题 1.4.3

令 $F(x)$是随机变量 X 的分布函数。

(i) 令 $Y=-X$. 给定 $F(x)$ 连续时，证明 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=1-F(-y)$且 $f_Y(y)=f(-y)$. 如果 $F(x)$在一点不连续，正确公式是什么？

(ii) 令 $Y=aX+b$，其中 a 和 b 是常数. 证明对正数 a，有

$$F_Y(y)=F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{f[(y-b)/a]}{a}.$$

a 是负数时，公式怎样？

(iii) 令 $Y=X^2$. 证明

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } y\leqslant 0,\\ F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}), & \text{当 } y>0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } y\leqslant 0,\\ \dfrac{f(\sqrt{y})+f(\sqrt{-y})}{2\sqrt{y}}, & \text{当 } y>0.\end{cases}$$

(iv) 令 $y=g(x)$是严格单调上升，连续可微函数，它的反函数给定为 $x=h(y)$. 令 $Y=g(X)$，证明

$$f_Y(y)=f[h(y)]\cdot|h'(y)|.$$

(v) 令 X 是高斯变量. 求下列随机变量的密度：(1) X，(2) X^2，(3) X^k，其中 k 是整数，(4) e^X，(5) $\sin X$. 注意问题中不是所有函数都满足(iv)的条件。

(vi) 令 X 是随机变量，$f(x)$ 是密度，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)ds$ 是分布函数．求随机变量 $F(X)$ 的密度和分布函数。

一个 n 维随机变量是样本空间 Ω 上 n 个随机变量构成的向量 $\mathbf{x}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$，使得对所有实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，集合

$$\{\omega \mid X_1(\omega)\leqslant x_1, X_2(\omega)\leqslant x_2, \cdots, X_n(\omega)\leqslant x_n\}$$

是随机事件．例如相空间中点的位置是 $6N$ 维随机变量，其中 $X_1, \cdots, X_{3N}$ 是 N 个质点系的 $3N$ 个空间坐标，$X_{3N+1}, \cdots, X_{6N}$ 是 $3N$ 个速度分量．在这种情况下，样本空间是 $6N$ 维欧几里得空间 R^{6N}，随机事件集合是具有第 1.2 节性质(i)～(iii)且包含所有半空间 $\{x_j\leqslant a\}$，$j=1, 2, \cdots, 6N$ 的最小集，其中 a 是任意实数。

(联合)分布函数 $F(\mathbf{x})=F(x_1, \cdots, x_n)$ 定义为

$$F(\mathbf{x})=P(X_1\leqslant x_1, \cdots, X_n\leqslant x_n)$$

($X_1\leqslant x_1, X_2\leqslant x_2, \cdots, X_n\leqslant x_n$ 的概率)．显然

$$F(x_1, \cdots, x_j, -\infty, x_{j+2}, \cdots, x_n)=0$$

$$F(\infty, \infty, \cdots, \infty)=1.$$

习题 1.4.4

令 (X, Y) 是两维随机变量，$F(x, y)$ 是分布函数．证明

$$P(a<X\leqslant b, c<Y\leqslant d)=F(b, d)-F(b, c)-F(a, d)+F(a, c).$$

如果存在 n 个变量的非负函数 $f(\mathbf{x})=f(x_1, \cdots, x_n)$ 使得

$$F(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(s_1, \cdots, s_n)ds_1\cdots ds_n,$$

那么 $f(\mathbf{x})$ 称为 $\mathbf{x}$ 的(概率)密度．一个 n 维随机变量称为高斯

的或正态 $N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$的，如果它的密度给定为

$$f(\mathbf{x})=(2\pi)^{-n/2}e^{-|\mathbf{x}|^2/2},$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 且 $|\mathbf{x}|^2=\sum_{j=1}^{n} x_j^2$. 随机变量 $\mathbf{x}=(X_1, \cdots, X_n)$称为有 n 维高斯或正态分布 $N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$，如果它的密度是

$$f(\mathbf{x})=(2\pi)^{-n/2}(\det\boldsymbol{\sigma})^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right],$$

这里 $\mathbf{m}$ 是向量，$\boldsymbol{\sigma}$ 是有正特征值的对称阵，$\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 的逆，且

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})=\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}^{-1}(x_i-m_i)(x_j-m_j).$$

令 $F(\mathbf{x})$是 n 维随机变量 $\mathbf{x}=(X_1, \cdots, X_n)$的分布函数. X_j 的分布函数可从 $F(\mathbf{x})$求得

$$\begin{aligned}F_j(x_j)&=F(\infty, \cdots, \infty, x_j, \infty, \cdots, \infty)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{x_j}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1, \cdots, s_j, \cdots, x_n)\\&\quad\cdot dx_1\cdots ds_j\cdots dx_n.\end{aligned}$$

函数 $f_j(x_j)$称为 X_j的边缘密度. $(X_1, \cdots, X_k)(k<n)$ 的边缘分布定义为

$$\begin{aligned}&F(x_1, \cdots, x_k)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k}\int_{-\infty}^{\infty}f(s_1, \cdots, s_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)\\&\quad\cdot ds_1\cdots ds_k dx_{k+1}\cdots dx_n.\end{aligned}$$

习题 1.4.5

（i）证明 n 维高斯变量的边缘分布是高斯的.

（ii）令 $\mathbf{x}$ 是 n 维正态变量 $N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$. 求 $\mathbf{x}$ 的边缘分布.

（作变量变换 $\mathbf{x}-\mathbf{m}=\mathbf{A}\mathbf{y}$，其中 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，将矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 对角化.）

习题 1.4.6

设 X 和 Y 的联合密度给定为

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\left(\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}\right)\right].$$

(i) (X, Y)是正态的吗？如果是正态的，求出 $\mathbf{m}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$.

(ii) 求出 X 和 Y 的边缘分布.

令 $U=g(X, Y)$, $V=h(X, Y)$是随机变量 (X, Y) 的一对一变换. (X, Y)的联合密度为$f(x, y)$, (U, V) 的联合密度可以如下求得. 令 $x=G(u, v)$, $y=H(u, v)$是逆变换, $J=\partial(x, y)/\partial(u, v)$是变换的雅可比(Jacobi)行列式, 那么

$$\Phi(u, v)=f(G(u, v), H(u, v))|J|$$

是(U, V)的密度. (验证!)

习题 1.4.7

令$f(x, y)$是(X, Y)的密度，求下列密度:

(i) $X\pm Y$. (提示: 运用 $U=X$, $V=X\pm Y$.)

(ii) XY.

(iii) X/Y.

(iv) $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\mathbf{B}$, 其中$\mathbf{A}$ 为矩阵, $\mathbf{B}$ 为向量.

习题 1.4.8

令 $\mathbf{X}$ 是 n 维 $N(0, \sigma)$随机变量, $\mathbf{A}$ 是 $r\times n$ 矩阵. 证明 $\mathbf{Y}=\mathbf{AX}$($\mathbf{X}$为列向量)是 $N(0, \tau)$的，并求出 τ.

1.5 离散变量和 δ-函数

考虑一枚可能不均匀硬币抛掷一次的试验. 样本空间由两

个基本事件组成 $\Omega=\{\mathrm{H},\ \mathrm{T}\}$，随机事件的集合是由 Ω 的所有子集组成，这样 $\mathscr{B}=\{\emptyset,\ \{\mathrm{H}\},\ \{\mathrm{T}\},\ \Omega\}$. $\mathscr{B}$ 上的概率函数定义为

$$P(\{\mathrm{H}\})=p,\ P(\{\mathrm{T}\})=q=1-p,\ 1\geqslant p\geqslant 0.$$

在 Ω 上定义一个随机变量 $X(\omega)$，如果 $\omega=\mathrm{H}$，置 $X(\omega)=1$，如果 $\omega=\mathrm{T}$，置 $X(\omega)=0$. 容易看到对所有实数 x，$\{X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{B}$，所以 $X(\omega)$ 是随机变量. $X(\omega)$ 的分布函数给定为

$$F(x)=P(X(\omega)\leqslant x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\geqslant 1,\\ q, & \text{如果 } 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{如果 } x<0,\end{cases}$$

从图 1.5.1 可以看出 $F(x)$ 是阶梯函数. $F(x)$ 是右连续的，因为在所有 $F(x)$ 可微分的点有 $F'(x)=0$，所以它没有有限密度函数 $f(x)$. 为了定义 $F(x)$ 的密度，需要讨论狄拉克(Dirac)的δ-函数的概念. 首先我们定义一些辅助概念.

所有满足下列条件的无限可微分实函数 $f(x)$：对所有 $n\geqslant 0$ 和 $N>0$，当 $|x|\to\infty$ 时有

$$|x|^N\frac{d^n f(x)}{dx^n}\to 0,$$

构成一个函数类 $\mathscr{D}$，它称为检验函数类. 对于 $\mathscr{D}$ 中函数序列

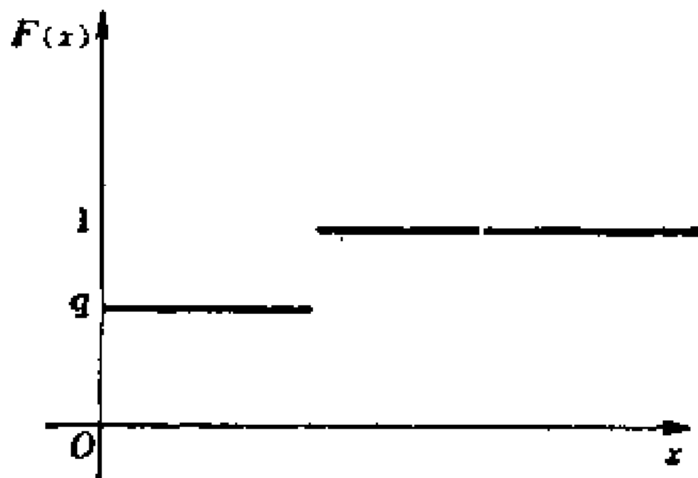


图 1.5.1

$\{f_n(x)\}$ 和函数 $f(x)$，如果对所有 k，当 $n\to\infty$ 时有

$$\max_x\left|\frac{d^k[f_n(x)-f(x)]}{dx^k}\right|\to 0, \tag{1.5.1}$$

称 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$. δ-函数是一个线性泛函(从 $\mathscr{D}$ 到 **R** 的函数)，它对每一检验函数 $f(x)$ 给予实数 $f(0)$. 我们记为

$$\langle\delta(x),\ f(x)\rangle=f(0).$$

常采用记号

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0). \tag{1.5.2}$$

但是必须注意到不存在有限函数 $\delta(x)$ 对所有检验函数满足(1.5.2)式[59].

容易看到，在 $\mathscr{D}$ 中当 $n\to\infty$ 时，如果 $f_n(x)\to f(x)$，那么有

$$\langle\delta,\ f_n\rangle\to\langle\delta,\ f\rangle,\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}.$$

我们将这一事实称为 δ 是连续线性泛函. 注意到这一类型的连续性并未蕴涵着 δ 作为函数是连续的. 带有 δ-函数的计算规则是常用的积分计算规则. 这样 $\delta_y(x)\equiv\delta(x-y)$ 形式定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)f(z+y)dz=f(y),$$

这里用到变量变换 $z=x-y$. 如果 $f(x)\equiv 1$，类似于(1.5.2)式，定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1. \tag{1.5.3}$$

注意 1 不是 $\mathscr{D}$ 中元素，但如取 $f_n(x)$ 使 $|x|<n$ 时 $f_n(x)=1$，$|x|>n+1$ 时 $f_n(x)=0$，$n\leqslant|x|\leqslant n+1$ 时 $0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$ 且 $f_n(x)\in\mathscr{D}$，则对所有 y，当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\delta(x-y)dx\to 1.$$

因为 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to 1$，且当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{d^k}{dx^k}[f_n(x)-1]\to 0.$$

故我们能验证定义(1.5.3)式.

δ-函数也可定义为函数的极限. 令

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/2t},\ t>0,\ -\infty<x<\infty.$$

那么,当 $t\to 0$ 时,对任意光滑可积函数 $f(x)$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)u(x,\ t)dx\to f(0), \tag{1.5.4}$$

在这种意义下,称 $u(x,\ t)\to\delta(x)$,当 $t\to 0$. 事实上,$f(x)=f(0)+f_1(x)$,当 $x\to 0$ 时,$f_1(x)\to 0$. 进行变量变换,设

$$x=z\sqrt{t},$$

得到 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)u(x,\ t)dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(z\sqrt{t})e^{-z^2/2}dz$$

$$=\frac{f(0)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z\sqrt{t})e^{-z^2/2}dz.$$

众所周知 $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=1,$$

因而,假设 $f_1(x)$ 是有界的,根据标准收敛定理(勒贝格控制收敛定理)[35],当 $t\to 0$ 时,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z\sqrt{t})e^{-z^2/2}dz\to 0.$$

由此得到(1.5.4)式成立. δ-函数是一个特殊的广义函数. 广义函数 φ 是对每一检验函数 $f(x)$ 赋值为一实数的线性泛函,对所有实数 α 和 β 及所有检验函数 f 和 g 有

$$\langle\varphi,\ \alpha f+\beta g\rangle=\alpha\langle\varphi,\ f\rangle+\beta\langle\varphi,\ g\rangle.$$

当 $n\to\infty$ 时, 在 (1.5.1) 式意义下如有 $f_n(x)\to f(x)$, 则 $\langle\varphi,$

$f_n(x)\rangle\to\langle\varphi, f(x)\rangle$, 就称广义函数 φ 是连续的. 对任意一个可积函数 $h(x)$, 使它以如下方式作用于检验函数 $f(x)$:

$$\langle h, f\rangle\equiv\int h(x)f(x)dx,$$

$h(x)$ 就定义了一个广义函数. 如果对每一检验函数 $f(x)$, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\langle\varphi_n, f\rangle\to\langle\varphi, f\rangle$, 就称广义函数序列 $\{\varphi_n\}$, $n=1, 2, \cdots$, 收敛于广义函数 φ. 即使 φ 不是一个函数, 我们仍记 $\langle\varphi, f\rangle\equiv\int\varphi(x)f(x)dx$. 用 $\mathscr{D}'$ 表示所有广义函数组成的集合. 为了求 δ 的"不定积分"值

$$\theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(s)ds,$$

可用近似式

$$\theta_t(x)=\int_{-\infty}^{x}u(z, t)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\infty,x)}(z)u(z, t)dz,$$

其中如果 $z\in(a, b)$ 时 $\chi_{(a,b)}(z)=1$, $z\notin(a, b)$ 时 $\chi_{(a,b)}(z)=0$. 类似于(1.5.4)式, 对每一 $x>0$, 有极限

$$\lim_{t\to0}\theta_t(x)=1,$$

对每一 $x<0$, 有极限

$$\lim_{t\to0}\theta_t(x)=0.$$

这样

$$\theta(x)=\begin{cases}1, \text{如果 } x>0,\\0, \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

为了使 $\theta(x)$ 成为概率分布函数, 我们定义 $\theta(0)=1$, 这就保证 $\theta(x)$ 为右连续. 作为广义函数来说, 这不影响 $\theta(x)$, 因为置 $\theta(0)$ 为任意数, 如果 $f(x)$ 是 $\mathscr{D}$ 中任意函数, 它并不改变积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\theta(x)dx$$

的值. 现在可定义变量 $X(\omega)$ 的概率分布密度. 因为

$$F(x)=P(X(\omega)\leqslant x)=q\theta(x)+p\theta(x-1),$$

我们有

$$f(x)=F'(x)=q\delta(x)+p\delta(x-1). \qquad (1.5.5)$$

因为对所有 $|x|>0$, 当 $t\to 0$ 时有 $(1/\sqrt{2\pi t})e^{-x^2/2t}\to 0$, 所以如果 $x\neq 0$ 必有 $\delta(x)=0$. 这样(1.5.5)式中所有密度集中于点 $x=0$ 和 $x=1$. 令

$$f(x_0)=[F(x_0^+)-F(x_0^-)]\delta(x-x_0),$$

其中 $F(x_0^\pm)\equiv\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}F(x_0\pm\varepsilon)$ 就能定义任意概率分布函数 $F(x)$ 在它的跳跃不连续点 x_0 的密度。

习题 1.5.1

对于随机变量

$$X(\omega)=e_1(\omega)+e_2(\omega)$$

构造分布函数和密度函数，这里 Ω 是抛掷一枚硬币两次的试验组成的样本空间, 概率测度为

$$P(\{H\})=p,\ P(\{T\})=q,$$

注意到两次抛掷的结果是独立的.

变量 e_1 和 e_2 定义为：如果第 i 次抛掷是正面朝上则 $e_i(\omega)=1$, 否则 $e_i(\omega)=0(i=1,\ 2)$.

习题 1.5.2

给定 c 和 d, 对于哪些值 a, 使泛函

$$f(x)=a\delta(cx+d)$$

是概率密度?（运用积分变量变换。）

习题 1.5.3

密度函数给定为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\delta(x-n),$$

求分布函数。

习题 1.5.4

对于哪些值 c，泛函

$$f(x)=c\delta(e^x-1)$$

是概率密度？

习题 1.5.5

在高维空间中，对所有光滑可积函数 $f(\mathbf{x})$，用关系式

$$\int_{R^n}\delta(\mathbf{x})f(\mathbf{x})dx=f(0)$$

定义 $\delta(\mathbf{x})$. 证明当 $t\to 0$ 时有

$$(2\pi t)^{-n/2}e^{-|\mathbf{x}|^2/2t}\to\delta(\mathbf{x}).$$

如果随机变量 X 的密度给定为

$$f_X(x)=\sum_i p_i\delta(x-x_i),$$

称 X 是离散的，其中 $p_i>0$ 且 $\sum_i p_i=1$. 在这种情况下，

$$F_X(x)-F_X(x-)=P(X(\omega)=x).$$

在 $F_X(x)$ 的任意连续点 x(即 $x\neq x_i$)上，有

$$P(X(\omega)=x)=0.$$

这样，离散变量只能在一个可数集上有正概率. 我们有

$$P(X(\omega)=x_i)=p_i$$

和

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^x\sum_i p_i\delta(s-x_i)ds=\sum_{x_i<x}p_i.$$

1.6 条件分布和独立性

令 $X(\omega)$ 是样本空间 Ω 上的随机变量. 对于任意随机事件 B，我们有

$$P(X(\omega)\leqslant x|B)=\frac{P((X(\omega)\leqslant x)\cap B)}{P(B)} \qquad (1.6.1)$$

函数 $F_{X|B}(x)\equiv P(X(\omega)\leqslant x|B)$ 称为 X 关于 B 的条件分布。设 $Y(\omega)$是定义在 Ω 上的另一随机变量且令

$$B=\{y\leqslant Y(\omega)\leqslant y+\Delta y\}.$$

若 $P(y\leqslant Y(\omega)\leqslant y+\Delta y)>0$, 那么(1.6.1)式成为

$$F_{X\,y<Y<y+\Delta y}(x)=\frac{P\{(X(\omega)\leqslant x)\cap(y\leqslant Y(\omega)\leqslant y+\Delta y)\}}{P\{y\leqslant Y(\omega)\leqslant y+\Delta y\}}.$$

令 $f(x, y)$是 X 和 Y 的联合概率密度, 于是有

$$P\{y\leqslant Y(\omega)\leqslant y+\Delta y\}=\int_y^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{\infty}f(x, z)dxdz.$$

故

$$F_{X|y<Y<y+\Delta y}(x)=\frac{\int_y^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{x}f(t, s)dtds}{\int_y^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{\infty}f(t, s)dtds}. \qquad (1.6.2)$$

分子和分母同除以 Δy, 且令 $\Delta y\to 0$, 得到

$$F_{X|Y}(x|y)\equiv\frac{\int_{-\infty}^{x}f(t, y)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}f(t, y)dt}=\frac{\partial F_{X,Y}(x, y)/\partial y}{dF_Y(y)/dy},$$

其中 $F_{X,Y}(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(t, s)ds\,dt$ 是 X 和 Y 的联合概率分布, $F_Y(y)$是 Y 的边缘分布, 将(1.6.2)式对于 x 求导, 得到 X 关于 Y 的条件密度:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x, y)dx}. \qquad (1.6.3)$$

我们可将贝叶斯规则写为下列形式

$$f_{X|Y}(x|y)=f_{Y|X}(y|x)\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}.$$

注意 X 和 Y 可看为是向量，于是(1.6.3)式取为

$$f_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)|(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)}[(x_1, x_2, \cdots, x_n)|(y_1, y_2, \cdots, y_m)]$$

$$=\frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)dx_1dx_2\cdots dx_n}.$$

如果 $P(X\in S)>0$，其中 S 是 R 中的集合，我们有

$$P\{X\leqslant x|X\in S\}=\frac{P[(X\leqslant x)\cap(X\in S)]}{P\{X\in S\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}\chi_S(x)f(x)dx}{\int_S f(x)dx},$$

其中 $f(x)$是 X 的密度．由此看到条件分布的密度为

$$f_{X|S}(x)=\frac{\chi_S(x)f(x)}{\int_S f(x)dx}.$$

如果两维随机变量(X, Y)的联合概率分布满足

$$F_{(X,Y)}(x, y)=F_X(x)F_Y(y),$$

那么 X 和 Y 称为是独立的变量．在这种情况下，密度满足

$$f_{(X,Y)}(x, y)=f_X(x)f_Y(y),$$

其中 $f_X(x)=F'_X(x)$, $f_Y(y)=F'_Y(y)$.

容易看到，如果 X 和 Y 是独立的，则

$$F_{X|Y}(x|y)=F_X(x)$$

和

$$F_{Y|X}(y|x)=F_Y(y).$$

习题 1.6.1

令 X 是$[a, b]$上的均匀变量，即

$$f_X(x)=\frac{\chi_{[a,b]}(x)}{b-a}.$$

求条件密度

$$f_{X|[\alpha,\beta]}(x),$$

其中$[\alpha, \beta]\subset[a, b]$. 求$F_{X|[\alpha,\beta]}(x)$.

习题 1.6.2

令X和Y是两个独立的高斯变量. 求习题1.4.7中变量的密度. 其中哪些变量是高斯变量?

习题 1.6.3

习题1.4.6中变量X和Y是独立的吗? 求$F_{X|Y}(x|y)$, $F_{Y|X}(y|x)$以及相应的密度.

如果

$$F(x_1, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i),$$

则称随机变量$X_1, \cdots, X_n$为独立的. 在这种情况下,

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i).$$

习题 1.6.4

令$\mathbf{X}=(X_1, \cdots, X_n)$是$n$维高斯变量$N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, 变量$X_1, \cdots, X_n$独立吗? 如果$\mathbf{X}$是$N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$, 结果怎样?

习题 1.6.5

用$\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)^T$表示气体质点的速度向量. 根据麦克斯韦结果, 假设$\mathbf{v}$是三维随机变量, 它的密度$h(\mathbf{v})$满足下面两条公设:

(i) $v_j(j=1, 2, 3)$是具有相同分布的独立随机变量.

(ii) $\mathbf{v}$的密度是质点动能的函数, 即

$$h(\mathbf{v})=g\left(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2\right)\equiv p(|\mathbf{v}|),$$

这里m是质点的质量. 证明$\mathbf{v}$必是$N(\mathbf{0}, k\mathbf{I})$. 其中$k$是某个正常数, $(\mathbf{I})_{ij}=\delta_{ij}$(克罗内克$\delta$), 即$\mathbf{v}$是一个高斯变量. [提示 令$h(\mathbf{v})=f(v_1)f(v_2)f(v_3)$, 导出微分方程$p'(s)/sp(s)=$常数.]

1.7 数学期望、方差和其他矩

令 X 是随机变量，$f(x)$是它的密度．对于任意函数 $g(x)$，积分

$$Eg(X)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$$

称为随机变量 $g(X)$ 的**期望值**或**均值**或**数学期望**．

例如，考虑随机变量 X_n，它在值 $j=0, 1, 2, \cdots, n$ 上的概率为

$$P\{X_n(\omega)=j\}=\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j},\ 0<p<1.$$

它的密度为

$$f_{X_n}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\delta(x-j), \qquad (1.7.1)$$

我们有

$$Eg(X_n)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_n}(x)g(x)dx=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}g(j).$$

密度由(1.7.1)式给定的变量 X_n 称为**二项变量** $B(n, p)$．我们有

$$EX_n=np,\ EX_n^2=np[1+(n-1)p].$$

习题 1.7.1

运用(1.7.1)式，计算 $Eg(X_n)$，如果

(i) $g(x)=x$.

(ii) $g(x)=x^2$.

(iii) $g(x)=x^k$，其中 k 是任意正整数。

如果 X 是高斯变量 $N(0, 1)$，那么

$$EX=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}dx=0,$$

$$EX^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}dx=1.$$

习题 1.7.2

令 X 是高斯变量．证明 $EX^{2k+1}=0$，$EX^{2k}=1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)(k=0, 1, 2, \cdots)$．

数学期望 $m_k=EX^k(k=0, 1, 2, \cdots)$ 称为 X 的 k 阶矩．

表达式 $E(X-c)^k$，其中 c 是一个常数，称为 X 绕 c 的 k 阶矩．当 $c=EX$ 时，称 $\mu_k=E(X-EX)^k$ 为 k 阶中心矩．二阶中心矩称为 X 的方差，它的平方根 σ 称为 X 的标准差，

$$\sigma^2=\mathrm{Var}X=E(X-EX)^2=m_2-m_1^2.$$

它是 X 的离差程度的测度．

习题 1.7.3

令 X_n 是 $B(n, p)$，证明 $\mathrm{Var}X=np(1-p)$．

习题 1.7.4

令 $S(\nu)$ 是一个随机变量且有

$$P(S(\nu)=n)=\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!},$$

$S(\nu)$ 称为泊松变量．证明 $ES(\nu)=\nu$ 和 $\mathrm{Var}S(\nu)=\nu$．

习题 1.7.5

证明：若当 $n\to\infty$ 时，$np_n\to\nu$，则依分布有 $B(n, p_n)\to S(\nu)$，即 $P(B(n, p_n)=k)\to P(S(\nu)=k)$．

习题 1.7.6

证明：当 $n \to \infty$ 时，依分布有

$$\frac{B(n, p)-EB(n, p)}{\sqrt{\operatorname{Var}B(n, p)}} \to N(0, 1)$$

[德莫瓦佛-拉普拉斯(DeMoivre-Laplace)公式].

习题 1.7.7

证明：当 $\nu \to \infty$ 时，依分布有

$$\frac{S(\nu)-ES(\nu)}{\sqrt{\operatorname{Var}S(\nu)}} \to N(0, 1) \quad \text{(运用斯特林公式)}.$$

习题 1.7.8

令 $EX=m$, $\operatorname{Var}X=\sigma^2$,

(i) 令 $Y=aX+b$, 求 EY 和 $\operatorname{Var}Y$.

(ii) 变量 $Y=(X-m)/\sigma$ 称为规范化变量. 求 EY 和 $\operatorname{Var}Y$.

习题 1.7.9

证明

(i) $E\sum_{j=1}^{n} a_j X_j=\sum_{j=1}^{n} a_j EX_j$ (a_j 是实数).

(ii) 如果 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立的，那么

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}(EX_i)$$

和

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)=\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var}X_j.$$

习题 1.7.10

证明切比晓夫不等式：

$$P(|X-m_1|>k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2} \quad (k>0),$$

其中 $m_1=EX$, $\sigma^2=\text{Var}X$. [提示: 运用 $\int_0^\infty yf(y)dy \geqslant k\int_k^\infty f(y)dy$.]

在高维空间中,定义

$$Eg(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1, \cdots, x_n)f(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

其中 $f(\mathbf{x})=f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbf{x}=(X_1, \cdots, X_n)$ 的密度. 特别 $\mathbf{m}=E\mathbf{x}=(EX_1, EX_2, \cdots, EX_n)=(m_1, m_2, \cdots, m_n)$, 其中

$$m_j=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_jf(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

$k_1+k_2+\cdots+k_n$ **阶矩**定义为

$$m_{k_1,\cdots,k_n}=EX_1^{k_1}\cdots X_n^{k_n}.$$

$k_1+k_2+\cdots+k_n$ **阶中心矩**定义为

$$\mu_{k_1,\cdots,k_n}=E(X_1-m_1)^{k_1}\cdots(X_n-m_n)^{k_n}.$$

$\mathbf{x}$ 的**协方差矩阵**定义为

$$(\text{Cov}\mathbf{x})_{ij}=E(X_i-m_i)(X_j-m_j).$$

习题 1.7.11

(i) 如果 X 和 Y 是(一维)随机变量,定义 Cov(X, Y)为

$$\text{Cov}(X, Y)=E[(X-EX)(Y-EY)].$$

证明 $\text{Var}(X+Y)=\text{Var}X+\text{Var}Y+2\text{Cov}(X, Y)$.

(ii) 数

$$\rho=\frac{\text{Cov}(X, Y)}{(\text{Var}X\,\text{Var}Y)^{1/2}}=\frac{\mu_{1,1}}{\sigma_1\sigma_2}$$

称为 X 和 Y 的**相关系数**. 证明 $-1\leqslant\rho\leqslant1$ 且 $\rho^2=1$ 当且仅当

$$p(Y=aX+b)=1.$$

(iii) 如果 X 和 Y 独立, 证明 $\rho=0$[24].

习题 1.7.12

设两维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度由习题 1.4.6 给出. 计算 EX, EY, $\text{Var}X$, $\text{Var}Y$, $\text{Cov}(X, Y)$和 ρ.

习题 1.7.13

令(X, Y)是二维变量 $N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$. 证明

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\right),$$

其中 $\sigma_1^2=\mathrm{Var}X$, $\sigma_2^2=\mathrm{Var}Y$, 且 ρ 是相关系数。

习题 1.7.14

令 $\mathbf{x}=(X_1, \cdots, X_n)$是 $N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$. 求 $E\mathbf{x}$, $(\mathrm{Cov}\mathbf{x})_{ij}$.

n 维随机变量 $\mathbf{x}=(X_1, \cdots, X_n)$的特征函数定义为

$$\phi(\mathbf{t})=\phi(t_1, \cdots, t_n)=Ee^{i\mathbf{t}\cdot\mathbf{x}}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}t_jx_j\right)f(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

$(i=\sqrt{-1})$.

因而,特征函数是密度的傅里叶变换。

例如,令 X 是 $B(n, p)$变量,那么

$$\phi_{B(n,p)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\delta(x-j)dx$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}e^{ijt}=[pe^{it}+1-p]^n.$$

如果 X 是泊松变量 $S(\nu)$,则

$$\phi_{S(\nu)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\nu}\nu^n\delta(x-n)}{n!}\right]dx$$
$$=e^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu e^{it})^n}{n!}=e^{\nu(e^{it}-1)}.$$

令 X 是 $B(n, p)$变量且 Y 是独立于 X 的 $S(\nu)$变量. 运用特

征函数来计算 $X+Y$ 的密度函数。因为变量是独立的，故联合密度是两个密度之积：

$$f_{X,Y}(x, y)=f_X(x)f_Y(y).$$

由此得出

$$\phi_{X+Y}(t)=Ee^{it(X+Y)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{ity}f_X(x)f_Y(y)dx\,dy$$
$$=\phi_X(t)\phi_Y(t).$$

因为傅里叶变换之积是两个函数卷积的傅里叶变换，我们有

$$f_{X+Y}(x)=f_X(x)*f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(s)f_Y(x-s)ds$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\delta(s-j)$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\nu}\nu^k\delta(x-s-k)}{k!}\,ds$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\nu^k e^{-\nu}\delta(x-j-k)}{k!}.$$

这样，

$$P(B(n, p)+S(\nu)=l)=\sum_{j+k=l}\frac{e^{-\nu}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\nu^k}{k!}.$$

习题 1.7.15

假设 $B(n, p)$与 $S(\nu)$是独立的，计算

$$P(B(n, p)-S(\nu)=l).$$

习题 1.7.16

如果 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立变量，证明

$$\phi(\mathbf{t})=\prod_{i=1}^{n}\phi_i(t_i),$$

其中 $\phi_j(s)=Ee^{isX_j}$。

习题 1.7.17

(i) 证明高斯变量 $N(0,1)$的特征函数是 $e^{-t^2/2}$.

(ii) 如果 X 是 $N(m,\sigma)$, 证明 $\phi(t)=\exp\left(itm-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right)$.

习题 1.7.18

(i) 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立的 $N(m_j,\sigma_j)$ 变量. 证明 $z=\sum_{j=1}^{n}X_j$ 是 $N(m,\sigma)$变量, 其中 $m=\sum_{j=1}^{n}m_j$, $\sigma^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2$. 这是正态变量的加法定理. (提示: 运用特征函数.)其逆亦真[15].

(ii) 证明独立正态变量的线性组合是正态变量; 即如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立的 $N(m_j,\sigma_j)$且 $a_1,\cdots,a_n$ 是常数, 那么 $X=\sum_{j=1}^{n}a_jX_j$ 是 $N(m,\sigma)$的. 求m和σ.

习题 1.7.19

如果随机变量 X 的密度为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\ \dfrac{1}{(x-c)\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{[\log(x-c)-m]^2}{2\sigma^2}\right\}, & x>c,\end{cases}$$

称它为对数-正态分布, 其中 c 是常数. 求 $E(X)$和 $\mathrm{Var}(X)$.

在一个随机变量取给定值的条件下, 可以计算另一个随机变量的数学期望. 这样, 如果 X 和 Y 是两个随机变量, 那么

$$E(Y\mid X=x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X,Y}(x,y)dy}{f_X(x)}.$$

如果 A 是任意区间, 那么

$$E(Y|X\in A)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_A yf_{X,Y}(x,\ y)dx\,dy}{P(X\in A)}$$
$$=\frac{\int_A f_X(x)\int_{-\infty}^{\infty}[yf_{X,Y}(x,\ y)/f_X(x)]dy\,dx}{P(X\in A)}$$
$$=\int_A\frac{f_X(x)}{P(X\in A)}E(Y|X=x)dx$$
$$=E[E(Y|X=x)|X\in A].$$

特别,如果 Y 是随机事件 B 的特征函数,那么

$$P(Y=1)=P(B)$$

且对任意随机变量 X 有

$$P(B|X\in A)=E[P(B|X=x)|X\in A].$$

令 $A=(-\infty,\ \infty)$,我们得到

$$P(B)=EP(B|X=x),$$

这样,$P(B|X=x)$是随机变量[24]。

第二章 布朗运动

2.1 引言 朗之万方程和布朗运动

1826年英国植物学家布朗(Brown)首先注意到浸入液体中胶体微粒或质点的永不停歇的不规则运动. 这种微粒的不规则运动称为**布朗运动**, 实现这种运动的微粒称为布朗微粒. 布朗微粒的永不停歇的不规则运动是周围液体分子与之碰撞的结果. 胶体微粒比碰撞的液体分子大得多且重得多, 所以每次碰撞的影响可以忽略, 但是许多小的相互作用迭加产生一个可观察到的效果. 布朗微粒的分子碰撞频率非常高, 其碰撞次数是惊人的. 这样一个布朗微粒(例如半径50 pm的金微粒)如果在常态下浸入液体, 碰撞次数每秒超过10^{21}. 碰撞频率是如此之高使得每次碰撞所引起微粒运动路径的微小变化, 对于观察者来说是太难分辨了. 这样, 微粒的精确路径不能详细得到但能统计描述. 周围介质对布朗微粒运动的影响可用下面两个力的组合来描述. 因为所观察的微粒远远大于周围液体微粒, 布朗微粒与液体之间相互作用的聚集效应可以认为是流体动力的特征. 更精确地说, 可取一个作用于布朗微粒上的力是动摩擦力. 液体作用于浸入其内部的小球表面的摩擦力可由斯托克司(Stokes)定律决定, 每单位质量作用于半径为a的球形微粒的阻力为$-\beta\mathbf{v}$, 其中$\beta=6\pi a\eta/m$, η是周围液体的动力粘度系数, m是微粒质量, $\mathbf{v}$是微粒速度. 作用于布朗微粒的第二个力是由它与周围液体微粒的个别碰撞而产生的, 它引起微粒加速

度的瞬时变化，在大小和方向上两者都是随机的．关于此波动力 $\mathbf{f}(t)$（每单位质量）的主要假设是：(i) $\mathbf{f}(t)$与 $\mathbf{v}(t)$统计独立，(ii) $\mathbf{f}(t)$的变化比 $\mathbf{v}(t)$的变化更频繁，和 (iii) $\mathbf{f}(t)$的平均值为零．牛顿的运动方程给定为

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}=-\beta\mathbf{v}(t)+\mathbf{f}(t). \tag{2.1.1}$$

方程 (2.1.1) 称为朗之万 (Langevin) 方程．将方程的解与已知的物理定律对比便能得出 $\mathbf{f}(t)$ 的统计性质．随机微分方程 (2.1.1)的解确定了随机过程 $\mathbf{v}(t)$的转移概率密度 $p(\mathbf{v},t,\mathbf{v}_0)$，即函数 $p(\mathbf{v}, t, \mathbf{v}_0)$使得

$$P(\mathbf{v}(t)\in A\,|\,\mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_0)=\int_A p(\mathbf{v}, t, \mathbf{v}_0)d\mathbf{v}.$$

假设初始速度 $\mathbf{v}_0$ 已给定，故当 $t\to 0$ 时必有

$$p(\mathbf{v}, t, \mathbf{v}_0)\to\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0).$$

更进一步，从统计物理知道，当 $t\to\infty$ 时，密度 $p(\mathbf{v},t, \mathbf{v}_0)$ 是与 $\mathbf{v}_0$ 无关地逼近于周围介质温度 T 的麦克斯韦密度．因而，当 $t\to\infty$ 时，

$$p(\mathbf{v}, t, \mathbf{v}_0)\to\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{-m|\mathbf{v}|^2}{2kT}\right). \tag{2.1.2}$$

这个对 $p(\mathbf{v}, t, \mathbf{v}_0)$的要求必然也要求 $\mathbf{f}(t)$ 有某些统计性质．按照(2.1.1)式，形式解为

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0e^{-\beta t}+\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\mathbf{f}(s)ds. \tag{2.1.3}$$

因而，积分的统计性质与差 $\mathbf{v}(t)-\mathbf{v}_0e^{-\beta t}$ 的统计性质相同．因为对于充分大的 t，$\mathbf{v}(t)-\mathbf{v}_0e^{-\beta t}\approx\mathbf{v}(t)$，所以在极限意义下积分有高斯密度．将积分写为有限(黎曼)和，

$$\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\mathbf{f}(s)ds \approx e^{-\beta t}\sum_n e^{\beta n\Delta t}\mathbf{f}(n\Delta t)\Delta t$$

$$=e^{-\beta t}\sum_n e^{\beta n\Delta t}\Delta\mathbf{b}_n,$$

其中 $\Delta\mathbf{b}_n=\mathbf{f}(n\Delta t)\Delta t$. 对于充分大的 t, 我们得到

$$\mathbf{v}\approx\sum_n e^{\beta(n\Delta t-t)}\Delta\mathbf{b}_n. \tag{2.1.4}$$

随机变量 $\Delta\mathbf{b}_n$ 表示布朗微粒在时间区间 $(n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ 内所得到的随机加速度. 因为连续碰撞完全是不规则的, 这样可以认为变量 $\Delta\mathbf{b}_n$ 相互之间是统计独立的. 我们假设时间区间 Δt 比 $\mathbf{f}(t)$ 的单波动平均周期大. $\mathbf{f}(t)$ 的波动周期与布朗微粒和周围流体分子之间的连续碰撞时间同阶; 在液体中阶通常是 10^{-21} 秒. 于是, 每一加速度 $\Delta\mathbf{b}_n$ 是多次碰撞的结果, 所以我们可以认为所有 $\Delta\mathbf{b}_n$ 有相同的统计性质[9]. 因而如果选择 $\Delta\mathbf{b}_n$ 是零均值高斯变量, 那么正如所需的那样, $\mathbf{v}(t)$ 将是高斯变量. 为了计算 $\Delta\mathbf{b}_n$ 的方差, 置 $\mathrm{Var}\Delta\mathbf{b}_n=2q\Delta t$, 运用(2.1.4)式, 当 $\Delta t\to 0$ 时得到

$$E|\mathbf{v}|^2=\sum_n 2q\Delta t e^{2\beta(n\Delta t-t)}\to 2q\int_0^t e^{2\beta(s-t)}ds$$

$$=\frac{q}{\beta}(1-e^{-2\beta t}).$$

另一方面, 当 $t\to\infty$ 时有

$$E|\mathbf{v}|^2\to\frac{kT}{m}.$$

因而

$$q=\frac{\beta kT}{m}. \tag{2.1.5}$$

令 $\mathbf{x}(t)$ 是布朗微粒的位移, 那么

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+\int_0^t\mathbf{v}(s)ds. \tag{2.1.6}$$

将(2.1.3)式代入(2.1.6)式得到

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+\int_0^t\left[\mathbf{v}_0e^{-\beta s}+e^{-\beta s}\int_0^s e^{\beta u}\mathbf{f}(u)du\right]ds.$$

改变积分次序，得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t)&-\mathbf{x}_0-\frac{\mathbf{v}_0(1-e^{-\beta t})}{\beta}\\
&=-e^{-\beta t}\int_0^t\frac{e^{\beta s}\mathbf{f}(s)ds}{\beta}+\int_0^t\frac{\mathbf{f}(s)ds}{\beta}\\
&=\int_0^t g(s)\mathbf{f}(s)ds,
\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

其中 $g(s)=(1-e^{\beta(s-t)})/\beta$. 对于积分再次运用有限和近似式，推得变量

$$\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0-\frac{\mathbf{v}_0(1-e^{-\beta t})}{\beta}$$

是零均值高斯变量且方差为

$$\sigma^2=2q\int_0^t g^2(s)\,ds=\frac{q}{\beta^3}(2\beta t-3+4e^{-\beta t}-e^{-2\beta t}).\tag{2.1.8}$$

因此，$\mathbf{x}(t)$的概率密度给定为

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x},\ t,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{v}_0)=&\left\{\frac{m\beta^2}{2k\pi T[2\beta t-3+4e^{-\beta t}-e^{-2\beta t}]}\right\}^{3/2}\\
&\cdot\exp\left\{-\frac{m\beta^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-\mathbf{v}_0(1-e^{-\beta t})/\beta|^2}{2k\pi T[2\beta t-3+4e^{-\beta t}-e^{-2\beta t}]}\right\}.
\end{aligned}\tag{2.1.9}$$

将上式对 $\mathbf{v}_0$ 的稳定密度取平均，则对于充分大的t，我们有

$$p(\mathbf{x},\ t,\ \mathbf{x}_0)\approx\frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\exp\left(\frac{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2}{4Dt}\right),\tag{2.1.10}$$

其中

$$D=\frac{kT}{m\beta}=\frac{kT}{6\pi a\eta}.\tag{2.1.11}$$

由此得出 p 满足扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=D\Delta p. \tag{2.1.12}$$

扩散系数的公式(2.1.11)是由爱因斯坦[16]得到的. 现在我们用下列性质定义布朗运动 $\mathbf{x}(t)$:

(i)

$$P(\mathbf{x}(t)\in A\mid\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0)=(4\pi Dt)^{-3/2}\int_A e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2/4Dt}\,d\mathbf{x}. \tag{2.1.13}$$

(ii) 增量 $\mathbf{x}(t+s)-\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t-u)$ 是独立的且对于 $s\geqslant 0$ 及 $u\geqslant 0$, 它们与 t 无关.

(iii) $\mathbf{x}(t)$ 的路径是连续的.

(iv) 对于每一有限序列 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, $(\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2),\cdots,\mathbf{x}(t_n))$ 的联合概率分布是高斯分布.

令 $w(t)$ 是 $\mathbf{x}(t)$ 的一维模拟, 取 $D=\frac{1}{2}$ 和 $w(0)=0$. $w(t)$ 的转移分布为

(i) $P(a\leqslant w(t)\leqslant b\mid w(s)=x)$

$$=[2\pi(t-s)]^{-1/2}\int_a^b e^{-(x-y)^2/2(t-s)}\,dy. \tag{2.1.14}$$

(ii) $(w(t_1),\cdots,w(t_n))$ 的联合概率分布是均值为 0 的高斯分布, 所以它由协方差 $Ew(t_i)w(t_j)$ 决定. 运用增量的独立性以及 $Ew^2(t)=t$ 容易确定这些协方差. 事实上, 假设 $t<s$, 我们有

$$\begin{aligned}Ew(t)w(s)&=E[w(s)-w(t)]w(t)+Ew^2(t)\\&=E[w(s)-w(t)]Ew(t)+t\\&=t=t\wedge s\equiv\min(t,s).\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

容易看出下面都是布朗运动:

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ w_1(t)=w(t+s)-w(s).\\&\text{(ii)}\ w_2(t)=cw\left(\frac{t}{c^2}\right),\text{其中 } c \text{ 是任意正常数.}\\&\text{(iii)}\ w_3(t)=tw\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}\right\}\quad(2.1.16)$$

第 2.3* 节进一步讨论 $w(t)$ 的性质，指出 $w(t)$ 处处不可求导且

$$\limsup_{t\to\infty} w(t)=+\infty,\ \liminf_{t\to\infty} w(t)=-\infty.$$

习题 2.1.1

通过计算得出(2.1.7)式～(2.1.11)式和(2.1.16)式的(i)～(iii).

习题 2.1.2

证明沿着任何给定方向（例如 x–方向）布朗微粒的均方位移公式为

$$\frac{1}{3}E|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0|^2=2Dt=\left(\frac{kT}{3\pi a\eta}\right)t,\ \text{对大的 } t,$$

$$E|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0|^2=\left(\frac{3kT}{m}\right)t^2=E|\mathbf{v}_0|^2t^2,\ \text{对小的 } t,$$

这里假设 $\mathbf{v}_0$ 遵循麦克斯韦分布(2.1.2)式.

习题 2.1.3

令 $\mathbf{x}(t)=\int_0^t g(s)\mathbf{f}(s)\,ds$，其中 $g(t)$ 是连续函数．证明 $\mathbf{x}(t)$ 是高斯变量且 $E\mathbf{x}(t)=0$，以及

$$E|\mathbf{x}(t)|^2=2q\int_0^t g^2(s)\,ds.$$

习题 2.1.4

令 $\mathbf{x}(t)=\int_0^t g(s)\mathbf{f}(s)ds$ 和 $\mathbf{y}(t)=\int_0^t h(s)\mathbf{f}(s)\,ds$．证明变量 $\mathbf{z}(t)=(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))$ 是高斯的，$E\mathbf{z}(t)=0$ 且

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{y}(t))=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

其中 $A=2q\int_0^t g^2(s)ds,\ B=2q\int_0^t g(s)h(s)ds,\ C=2q\int_0^t h^2(s)ds.$

习题 2.1.5

求 $\mathbf{x}(t)$和 $\mathbf{v}(t)$的联合转移概率密度，其中 $\mathbf{v}(t)$由(2.1.3)式给出，$\mathbf{x}(t)$由(2.1.6)式给出.

习题 2.1.6

已知布朗正弦波发生器的朗之万方程为

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega^2x=f(t), \tag{2.1.17}$$

其中$x(t)$是质点的一维位移，随机力$f(t)$是$\mathbf{f}(t)$的一维情形.

(i) 解方程(2.1.17).

(ii) 求速度$v(t)=\dot{x}(t)$，其中$x(t)$是(2.1.17)式的解.

(iii) 求$x(t)$的转移概率密度.

(iv) 求$v(t)$的转移概率密度.

(v) 求$(x(t),\ v(t))$的联合概率密度.

(vi) 证明当$t\to\infty$时有$Ex(t)\to0$, $Ev(t)\to0$, $Ex(t)v(t)\to0$, $Ex^2(t)\to kT/m\omega^2$和$Ev^2(t)\to kT/m$[9].

习题 2.1.7

离子化气体(等离子气体)中一颗电子可以当作一台布朗正弦波发生器. 弹性恢复力是邻近较重的离子和其他电子的库仑引力和库仑斥力.碰撞是微粒之间电的相互作用. 射向等离子气体频率为ω的激光束可以当作作用于电子的附加力(电磁场内). 所得的朗之万方程为

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_p^2x=E_0\sin\omega t+f(t), \tag{2.1.18}$$

其中ω_p是等离子气体的波动频率. 这里β是有效电子碰撞频率. 解方程(2.1.18)且分析下列情况中的解: (i) $\beta\ll\omega_p$和 (ii) $\omega=\omega_p$. 给出类似于习题2.1.6(i)～(v)中的计算[17].

习题 2.1.8

写出恒定磁场中带电布朗微粒的朗之万方程. 给出类似于习题 2.1.6(i)～(v)中的计算.

2.2 随机游动和硬币抛掷 后向方程和前向方程

低压下气体微粒的运动或者任何与其他物体碰撞的物体运动在本质上同布朗运动是类似的. 假设碰撞的持续时间与运动的观察时间尺度相比是很短的, 碰撞的频率在相同时间尺度内是相当高的. 如同第 2.1 节, 也认为碰撞是随机的. 与宇宙空间中其他星体相比, 一颗小的星体其随机飞行就属于这种情况, 空间起着布朗运动中液体(例如银河系中的星体)的作用, 碰撞认为是所研究的星体出现在其他星体引力场中. 这种小星体的运动轨道是随机路径, 它在频繁的碰撞之间是直线运动, 但从宇宙变化的时间尺度来看可认为它在非常迅速地起伏波动. 这种运动在一维空间中最简单的数学模型是随机游动, 即质点作一串等长位移, 每一步的方向或向前或向后, 且在等长的时间区间内, 概率相等均为 $\frac{1}{2}$. 更数学化的形式描述可用下列的硬币——抛掷模型给出. 从 $x_0=a(a=0, \pm1, \cdots)$ 出发, 往上抛一枚硬币且定义

$$e_n=\begin{cases}1, & \text{如果在第 } n \text{ 次抛掷中正面朝上,}\\ -1, & \text{如果在第 } n \text{ 次抛掷中背面朝上;}\end{cases}$$

也就是说, 如果正面朝上, 沿着 x 轴向右移动一步, 如果背面朝上, 沿着 x 轴向左移动一步. 到时刻 n, 此过程的本钱或地址为

$$X_n=a+e_1+e_2+\cdots+e_n.$$

变量 e_n 是独立的且

$$P(e_n=1)=P(e_n=-1)=\frac{1}{2}.$$

显然，当 n 与 k 奇偶性相同时有

$$P(X_n=k\,|\,X_0=0)\equiv P_0(X_n=k)=2^{-n}\binom{n}{\frac{n-k}{2}},$$

其他情况下，$P_0(X_n=k)=0$。

随机变量序列 X_n 称为**随机过程**. 它有下列马尔可夫性质："运动可在任意固定时间 m 重新开始". 或更精确地说，

$$\begin{aligned}P(X_{n+m}\in B\,|\,X_m=b,\ X_0=a)&\\ =P(X_{n+m}\in B\,|\,X_m=b)&\\ =P_b(X_n\in B),&\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

其中 B 是任意整数集(图 2.2.1). X_n 的转移概率为

$$p(n,\ a,\ b)=P_a(X_n=b)=P_0(X_n=b-a),$$

它满足下列方程：

$$p(n+1,\ a,\ b)=\frac{1}{2}[p(n,\ a+1,\ b)+p(n,\ a-1,\ b)],\tag{2.2.2}$$

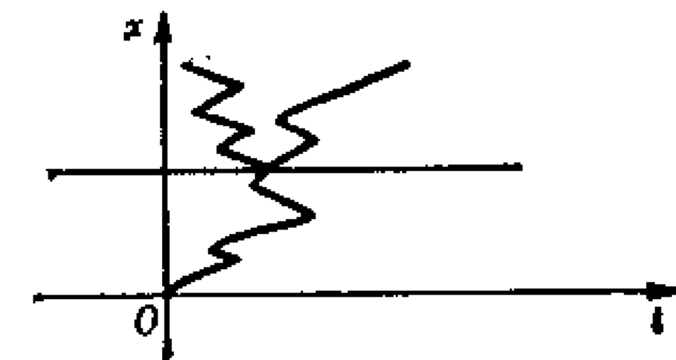


图 2.2.1

这是因为经过 $n+1$ 步从 a 到 b 的概率等于第一步向右然后经过 n 步到 b 的概率加上第一步向左然后经过 n 步到 b 的概率. 我们称 a 为"后向"变量，b 为"前向"变量. 从(2.2.2)式得到

$$\begin{aligned}&p(n+1,\ a,\ b)-p(n,\ a,\ b)\\ &\quad=\frac{1}{2}[p(n,\ a+1,\ b)-2p(n,\ a,\ b)+p(n,\ a-1,\ b)].\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

方程(2.2.3)称为过程 X_n 的后向方程。

习题 2.2.1

对 $p(n, a, b)$ 导出类似的前向方程(关于 b)。

我们将证明当 $n\to\infty$ 时，正态随机游动 X_n 的概率分布收敛于布朗运动的概率分布。

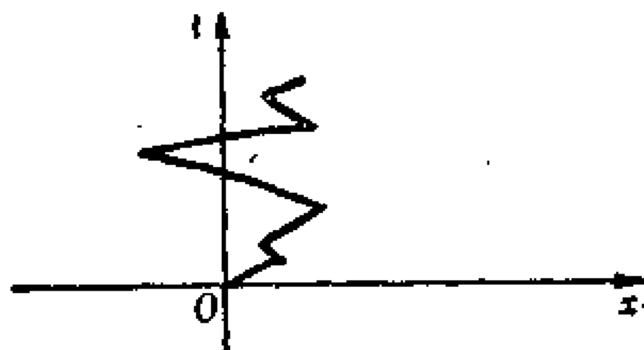


图 2.2.2

令 $x_n(t)$ 是 (t, x) 平面上在点 $\left(\frac{X_m}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)$ 之间的折线插值(图 2.2.2)。

下面[33]我们将证明经典的中心极限定理：当 $n\to\infty$ 时有

$$P_0\left(a\leqslant\frac{X_n}{\sqrt{n}}<b\right)\to\int_a^b\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx.$$

令 $u(x, t)$ 是热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0,\ -\infty<x<\infty, \tag{2.2.4}$$

$$u(x, 0)=f(x)$$

的解，即

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/2t}f(y)\,dy,$$

其中 f 是检验函数，$u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)=E_k f\left(\frac{X_m}{\sqrt{n}}\right)$ 为(给定 $X_0=k$) $f\left(\frac{X_m}{\sqrt{n}}\right)$ 的数学期望，即

$$u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}p(m, k, j)f\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right).$$

由(2.2.3)式得出 u_n 的后向差分方程：

$$
\begin{aligned}
&u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m+1}{n}\right)-u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right) \\
&\quad=\frac{1}{2}\left[u_n\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)-2u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)+u_n\left(\frac{k-1}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)\right] \\
&\quad\equiv\frac{1}{2} \Delta_k u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right).
\end{aligned}
$$

热传导方程(2.2.4)的解 $u(x, t)$所满足的相似差分方程是

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left[u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m+1}{n}\right)-u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)\right]}{(1/n)}+o(1) \\
&\qquad=\frac{\frac{1}{2} \Delta_k u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)}{(1/\sqrt{n})^2}+o(1). \qquad (\text{当 } n\to\infty)
\end{aligned}
$$

因为 u 关于 t 至少三次连续可微(验证此论断!)，当 $n\to\infty$ 时 $o(1)$ 关于 k 和 m 是一致的. 所以

$$
\begin{aligned}
u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m+1}{n}\right)=\frac{1}{2}&\left[u\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)\right. \\
&\left.+u\left(\frac{k-1}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)\right]+o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

但是 $$u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, 0\right)=u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, 0\right)=f\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right),$$

因而差分格式的第 m 步有

$$
u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)=u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n}\right)+o\left(\frac{m}{n}\right).
$$

令 $m/n\to t$, $k^2/\sqrt{n}\to x$, 我们看到当 $n\to\infty$ 时, $o(m/n)=o(1)$, 即 $u_n(k/\sqrt{n}, m/n)\to u(x, t)$. 因而, 置 $k=0$, $m=n$得到

$$
E_0 f\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} f(x)\,dx.
$$

用检验函数序列 f_j 代替 f,

$$f_j \to f_0 = \begin{cases} 1, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

得到

$$P_0\left(a \leqslant \frac{X_n}{\sqrt{n}} < b\right) = E_0 f\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right) \to \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

这就证明了,当 $n \to \infty$ 时,$k/\sqrt{n} \to x$, $m/n \to t$ 对所有检验函数 f 有

$$E_k f\left(\frac{X_m}{\sqrt{n}}\right) \to (2\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/2t} f(y) dy.$$

再次用检验函数序列逼近 f_0,推得

$$\begin{aligned} P_k\left(a \leqslant \frac{X_m}{\sqrt{n}} \leqslant b\right) &= P_x(a \leqslant x_n(t) \leqslant b) \\ &\to (2\pi t)^{-1/2} \int_a^b e^{-(x-y)^2/2t} dy, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

其中 $k = [x\sqrt{n}]$, $m = [nt]$, $x_n(t) = X_m/\sqrt{n}$ 且 $n \to \infty$. 这样,我们看到有尺度的随机游动 $x_n(t)$ 依分布收敛于 $w(t)$. 类似地,可以证明当 $n \to \infty$ 时,对所有有限序列 $t_1 < \cdots < t_j$, 依分布有

$$(x_n(t_1), \cdots, x_n(t_j)) \to (w(t_1), \cdots, w(t_j)).$$

根据有尺度的随机游动 $x_n(t)$ 的性质得知 $w(t)$ 具备第 2.1 节所描述的布朗运动的性质. 因为 $(w(t_1), \cdots, w(t_n))$ 是高斯的且 $Ew(t_i)w(t_j) = t_i \wedge t_j$, 我们有

$$\begin{aligned} &P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (a_i \leqslant w(t_i) \leqslant b_i)\right] \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp\{-(x_i - x_{i-1})^2 / 2(t_i - t_{i-1})\}}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} dx_n, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

其中 $x_0 = t_0 = 0$.

联合概率密度为

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\exp\{-(x_i-x_{i-1})^2/2(t_i-t_{i-1})\}}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}. \qquad (2.2.8)$$

特别，由(2.2.6)式和(2.2.1)式得到

$$P(w(t)\in B|w(s)=x)=\int_B\frac{e^{-(x-y)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dy$$

$$\equiv P(x,\ s,\ B,\ t)\quad (t>s);$$

也就是说转移概率 $P(x, s, B, t)$ 有密度 $p(x, s, y, t)$，使得

$$P(x,\ s,\ B,\ t)=\int_B p(x,\ s,\ y,\ t)dy,$$

同时

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

$$p(x,\ s,\ y,\ t)\to\delta(x-y),\quad 当\ t\downarrow s.$$

从(2.2.1)式看到 $w(t)$ 有**马尔可夫性**，即

$$P(w(t)\in B|w(t_1)=x_1,\ w(t_2)=x_2,\ \cdots,\ w(t_n)=x_n)$$

$$=P(w(t)\in B|w(t_n)=x_n),$$

其中 $t_0<t_1<\cdots<t_n<t$，B 是任意区间. 马尔可夫性意味着运动可在任意确定时间 t 重新开始. 事实上，联合密度(2.2.8)式确定了条件密度

$$p(x|x_1,\ \cdots,\ x_n)=\frac{p(x,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}{p(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}$$

$$=\frac{e^{-(x-x_n)^2/2(t-t_n)}}{\sqrt{2\pi(t-t_n)}}=p(x|x_n).$$

于是第 2.1 节中增量 Δb_n 的性质与 $\Delta w=w(t+\Delta t)-w(t)$ 的性质是相同的.

2.3* 布朗运动的构造

我们将用几乎处处(a.s.)一致收敛的级数来构造布朗运动，该级数的项为连续函数且其系数是随机的. 第 2.1 节中的

性质(i)～(iv)（第42页）作为布朗运动的定义．概率空间 Ω 是具有均匀分布的单位区间．首先构造 Ω 上独立的高斯变量 $N(0,1)$ 的无限序列．Ω 中每一个数 x 可用二进制表达式 $x=0.x_1x_2\cdots$ 表示，其中 $\{x_i\}$ 是 Ω 上的独立随机变量，它们取值 0 或 1 的概率均为 $\frac{1}{2}$．变量

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 0.x_1x_3x_6x_{10}\cdots, \\
y_2 &= 0.x_2x_5x_9\cdots, \\
y_3 &= 0.x_4x_8x_{13}\cdots, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

显然是独立的且在 Ω 上有均匀分布；即

$$P(y_i\leqslant\alpha)=\alpha,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant1.$$

下一步用

$$y_i=\int_{-\infty}^{g_i}\frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,ds$$

定义变量 g_i，即 $g_i=\mathrm{erf}^{-1}(y_i)$．显然，变量 $\{g_i\}$ 是独立的且有高斯分布 $N(0,1)$．再下一步，我们如下构造一串 [0, 1] 上的连续函数．在图 2.3.1 中构造了它们的导数

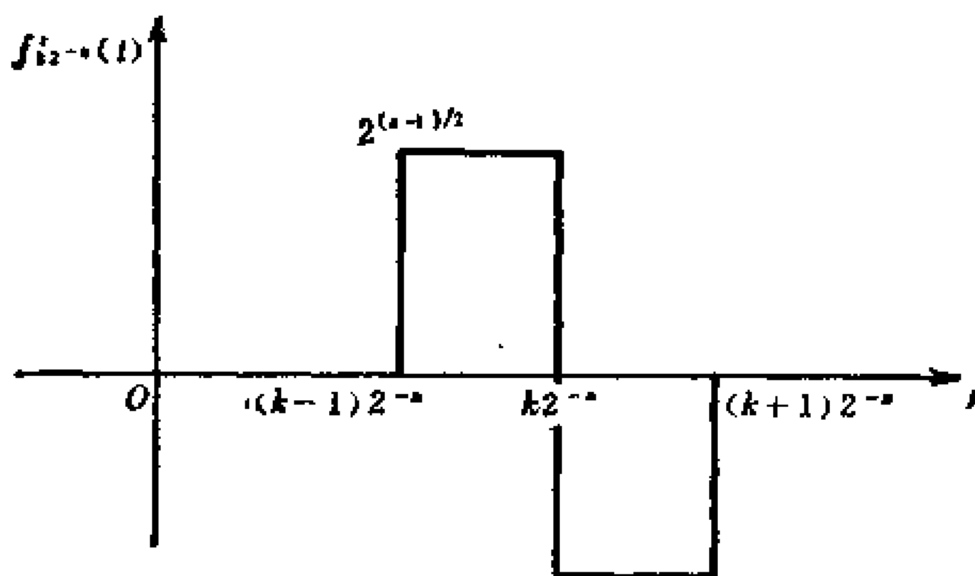


图 2.3.1

$$
f'_{k2^{-n}}(t)=\begin{cases}0, & t<(k-1)2^{-n},\\ 2^{(n-1)/2}, & (k-1)2^{-n}\leqslant t<k2^{-n},\\ -2^{(n-1)/2}, & k2^{-n}\leqslant t<(k+1)2^{-n},\\ 0, & (k+1)2^{-n}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}
$$

其中 k 是 $<2^n$ 的奇数. 函数族 $\{f'_{k2^{-n}}\}$ 称为哈尔(Haar)系统，它们组成 $L^2(0, 1)$上的正交基. 更精确地说，有

$$
\langle f'_{i2^{-n}}, f'_{j2^{-n}}\rangle\equiv\int_0^1 f'_{i2^{-n}}(t)f'_{j2^{-n}}(t)dt=\delta_{ij}, \qquad (2.3.1)
$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克函数且 $L^2(0, 1)$中每一函数 $f(t)$可唯一表示为

$$
f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=\text{奇数}<2^n} a_{k,n}f'_{k2^{-n}}(t)+a_0f'_0(t), \qquad (2.3.2)
$$

其中 $f'_0(t)\equiv 1$。系数 $a_{k,n}$ 由下式算出:

$$
a_{k,n}=\int_0^1 f(t)f'_{k2^{-n}}(t)dt,
$$

级数(2.3.2)式在 $L^2(0, 1)$意义下收敛于 $f(t)$[73]. 定义

$$
f_{k2^{-n}}(t)=\int_0^t f'_{k2^{-n}}(s)ds.
$$

构造 $w(t)$ 如下:

$$
w(t)=g_0f_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=\text{奇数}<2^n} g_{k2^{-n}}f_{k2^{-n}}(t), \qquad (2.3.3)
$$

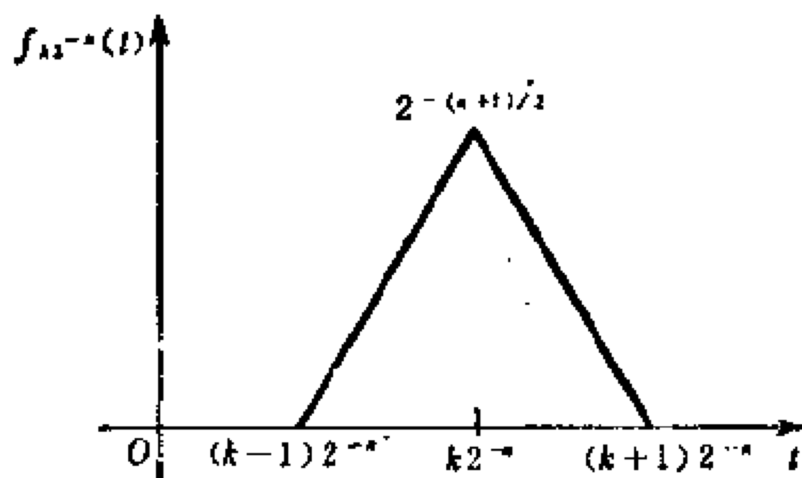


图 2.3.2

其中 $\{g_{k2^{-n}}\}$ 是上面构造的高斯变量序列，g_0 是独立于 $g_{k2^{-n}}$ 的另一高斯变量．我们将证明(2.3.3)式中的级数几乎处处一致收敛．因为函数 $f_{k2^{-n}}(t)$ 是连续的且对不同的 k 和固定的 n 有不相交的支集，故我们有

$$a_n \equiv \max_{0<t<1}\left|\sum_{k=\text{奇数}<2^n} g_{k2^{-n}} f_{k2^{-n}}(t)\right|$$
$$\leqslant 2^{-(n+1)/2} \max_{k=\text{奇数}<2^n} |g_{k2^{-n}}|.$$

因而

$$P(a_n > 2^{-n/2}\sqrt{n}) \leqslant P\left(2^{-(n+1)/2} \max_{k=\text{奇数}<2^n} |g_{k2^{-n}}| > 2^{-n/2}\sqrt{n}\right)$$
$$\leqslant \sum_{k=\text{奇数}<2^n} P(|g_{k2^{-n}}| > \sqrt{2n})$$
$$\leqslant 2^n \cdot 2\int_{\sqrt{2n}}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$
$$\leqslant 2^{n+1}\int_{\sqrt{2n}}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$
$$=\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(a_n > 2^{-n/2}\sqrt{n}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\pi n}} < \infty,$

根据波莱尔-康特立引理，我们有

$$P(a_n > 2^{-n/2}\sqrt{n}\ \text{i.o.}) = 0.$$

由此得出 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2}\sqrt{n} < \infty \quad (\text{a.s.}),$

所以，级数(2.3.3)式几乎处处一致收敛．现在指出 $w(t)$ 具有布朗运动的性质 (i)～(iv)．首先注意到 (2.3.2) 式中所有有限和是独立高斯变量的线性组合，所以 $w(t)$ 是高斯变量的极限，事实上向量 $(w(t_1), w(t_2), \cdots, w(t_n))$，$0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant 1$，有联合高斯分布．显然，由于 $Ew(t_i) = 0$，所以向量的联合分布由协方差 $Ew(t_i)w(t_j)$ 决定．现在因为变量 $g_{k2^{-n}}$ 的独立性，我

们有

$$
\begin{aligned}
&Ew(t_i)w(t_j)\\
&\quad=E\sum_n\sum_k g_{k2^{-n}}f_{k2^{-n}}(t_i)\sum_n\sum_k g_{k2^{-n}}f_{k2^{-n}}(t_j)\\
&\quad=f_0(t_i)f_0(t_j)+\sum_n\sum_k f_{k2^{-n}}(t_i)f_{k2^{-n}}(t_j). \qquad (2.3.4)
\end{aligned}
$$

为了验证(2.3.4)式中最后一个和式，考虑一个区间上示性函数

$$
\chi_{(0,t)}(s)=\begin{cases}1, & \text{如果 } 0<s<t,\\ 0, & \text{如果 } t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}
$$

的哈尔展开式．由(2.3.2)式，我们有

$$
\chi_{(0,t)}(s)=\sum_n\sum_k a_{k,n}f'_{k2^{-n}}(s),
$$

其中 $\qquad a_{k,n}=\int_0^1\chi_{(0,t)}(s)f'_{k2^{-n}}(s)ds=f_{k2^{-n}}(t).$

由(2.3.1)式，有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\chi_{(0,t_i)}(s)\chi_{(0,t_j)}(s)ds\\
&\quad=\int_0^1\sum_n\sum_k\int_0^{t_i}f'_{k2^{-n}}(u)du\,f'_{k2^{-n}}(s)\\
&\qquad\cdot\sum_n\sum_k\int_0^{t_j}f'_{k2^{-n}}(v)dv\,f'_{k2^{-n}}(s)ds\\
&\quad=\sum_n\sum_k f_{k2^{-n}}(t_i)f_{k2^{-n}}(t_j).
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
Ew(t_i)w(t_j)=\int_0^1\chi_{(0,t_i)}(s)\chi_{(0,t_j)}(s)ds=t_i\wedge t_j,
$$

如期望的那样我们证明了性质(ii)和(iii)．性质(i)是(iii)的直接结果．事实上，$\widetilde{w}(s)=w(t+s)-w(t)$是高斯的，并且向量$(\widetilde{w}(s_1),\cdots,\widetilde{w}(s_n))$有一个联合高斯分布．显然$E\widetilde{w}(s)=0$，且由(iii)得到$E\widetilde{w}^2(s)=s$．对所有$u\leqslant t$，增量$\widetilde{w}(s)$独立于$w(u)$，因为由(iii)得到

$$
E[w(t+s)-w(t)]w(u)=u-u=0,
$$

这正如我们所知的一样，不相关的高斯变量是独立的．这样，$\tilde{w}(s)$ 是布朗运动且与 t 无关．将 $w(t)$ 扩充到 $t>1$ 可如下达到．运用哈尔级数，构造[0, 1]上独立布朗运动的序列$\{w_j(t)\}$．令

$$
\begin{aligned}
w(t) &= w_0(t), \text{如果 } 0\leqslant t\leqslant 1, \\
&= w_0(1)+w_1(t-1), \text{如果 } 1\leqslant t<2, \\
&= w_0(1)+w_1(1)+w_2(t-2), \text{如果 } 2\leqslant t<3, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

容易看到，对所有 $t\geqslant 0$，此过程具有性质(i)—(iv)．$w(t)$的路径是连续的，但在任何点上都是不可微的．下面证明这个事实．假设 $w(t)$在某点 $0\leqslant t_0\leqslant 1$ 可微，那么在某个区间内必有

$$|w(t)-w(t_0)|\leqslant K|t-t_0|,$$

其中 K 是一个正常数．对于充分接近于 t_0 的点 t_1 和 t_2，我们有

$$
\begin{aligned}
|w(t_1)-w(t_2)| &\leqslant |w(t_1)-w(t_0)|+|w(t_0)-w(t_2)| \\
&\leqslant K(|t_1-t_0|+|t_2-t_0|).
\end{aligned}
$$

置 $i=[nt_0]+1$, $i<j<i+3$, $t_1=j/n$和$t_2=(j-1)/n$，对充分大的 n 得到

$$\left|w\left(\frac{j}{n}\right)-w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7K}{n}.$$

事件“$w(t)$在某个 t_0 处可微”包含于事件

$$B=\bigcup_{K\geqslant 1}\bigcup_{m\geqslant 1}\bigcap_{n\geqslant m}\bigcup_{0<i<n+1}\bigcap_{i<j<i+3}\left(\left|w\left(\frac{j}{n}\right)-w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|<\frac{7K}{n}\right)$$

中．我们将证明 B 是可数个概率为 0 的事件的并，因而 $P(B)=0$．事实上，因为性质(i)和(iii)，

$$P\left[\bigcap_{n\geq m}\bigcup_{0<i\leq n+1}\bigcap_{i<j\leq i+3}\left(\left|w\left(\frac{j}{n}\right)-w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|<\frac{7K}{n}\right)\right]$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}nP\left(\left|w\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{7K}{n}\right)^3$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[2\int_0^{7K/n}\frac{e^{-x^2n/2}}{\sqrt{2\pi/n}}dx\right]^3$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}Cn^{-1/2}=0,$$

其中
$$C=\frac{8(7K)^3}{\sqrt{2\pi}}.$$

下面性质(v)和(vi)更细致地刻划了布朗运动的特性.

令 $\mathscr{F}_t$ 是对所有 $s\leq t$ 和所有实数 a, 事件 $\{w(s)<a\}$ 生成的 Ω 的子域. 一个随机变量 τ, $0\leq\tau<\infty$, 如果对每个 $t\geq0$, 事件 $\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t$, 就称它为停时(或马尔可夫时间). 例如下叙定义的首次通过时间 τ_x 是停时, 即

$$\tau_x=\min\{t|w(t)=x\}.$$

因为
$$\{\tau_x\leq t\}=\bigcap_{m\geq1}\bigcup_{r=\text{有理数}<t}\left\{w(r)>x-\frac{1}{m}\right\}\in\mathscr{F}_t,$$

因而
$$\{\tau_x<t\}=\bigcup_{n\geq1}\left\{\tau_x\leq t-\frac{1}{n}\right\}\in\mathscr{F}_t.$$

(v)令 τ 是一有限停时, 置

$$\mathscr{F}_\tau=\bigcup_{t\geq0}\mathscr{F}_t\bigcap\{B\in\Omega|B\cap\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t,\text{对所有}t\geq0\}.$$

$w(t)$的强马尔可夫性就是说它具有下述性质:

$$P\{w(t+\tau)\in B|\mathscr{F}_\tau,\ w(s)=a\}$$
$$=P\{w(t)\in B|w(0)=b\},$$

其中 $s<t$ 且 $b=w(\tau)$.

由性质(v)可知布朗运动可以在停时重新开始. 更精确地说, 对所有 $s\leq\tau$,

$$\widetilde{w}(t)=w(t+\tau)-w(\tau)$$

是与 s 无关的布朗运动. 强马尔可夫性的证明和布朗运动的进一步讨论可见文献 [37] 及 [65].

如果对所有 $t_1<t_2<\cdots<t_n<t$ 和 $a_1, \cdots, a_n$, 一个随机过程有

$$E|x(t)|<\infty \tag{2.3.5}$$

和

$$E\{x(t)|x(t_1)=a_1, \cdots, x(t_n)=a_n\}=a_n \tag{2.3.6}$$

则称它为鞅.

(vi) **布朗运动是鞅.** 不等式(2.3.5)显然满足. 由 $w(t)$ 的马尔可夫性和性质(iv)有

$$\begin{aligned}E\{w(t)|w(s)=x\}&=\int\frac{ye^{-(x-y)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dy\\&=-\int\frac{(x-y)e^{-(x-y)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dy\\&\quad+x\int\frac{e^{-(x-y)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dy=x.\end{aligned}$$

因为第一个积分中的被积函数为$(x-y)$的奇函数, 故其积分值为零,第二个积分等于1.

另一个重要的鞅是

$$x(t)=e^{\alpha w(t)-(\alpha^2/2)t}, \ \alpha>0.$$

事实上,

$$\begin{aligned}E|x(t)|&=\int\frac{e^{\alpha x-(\alpha^2/2)t}e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}dx\\&=\int\frac{e^{-(x-\alpha t)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}dx=1,\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

因而得到不等式(2.3.5). 现在

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{\alpha[w(t)-w(s)]-(\alpha^2/2)(t-s)}x(s)\\&=e^{\alpha\tilde{w}(t-s)-(\alpha^2/2)(t-s)}x(s)\\&=\tilde{x}(t-s)x(s),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{x}(t-s)$ 与 $x(t-s)$ 有相同的概率律，但由性质(i)，它独立于 $x(s)$. 因而，由(2.3.7)式，

$$E\{x(t)\,|\,x(s)=x\}=E\{x(s)\tilde{x}(t-s)\,|\,x(s)=x\}$$
$$=xE\tilde{x}(t-s)=x.$$

习题2.3.1

证明下列函数是鞅：

(i) $w^2(t)-t$.　　　(ii) $e^{-\alpha t\cosh[\sqrt{2\alpha}\,w(t)]}$.

鞅满足下列柯尔莫哥洛夫不等式：令 $x(t)$ 是连续鞅，那么对任意 $\alpha>0$，有

$$P(\max_{0\leqslant t\leqslant T} x(t)>\alpha)\leqslant\frac{E(x(T)\vee 0)}{\alpha},\qquad(2.3.8)$$

这里 $x(T)\vee 0=\max(0,x(T))$. 事实上，令 $B=\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x(t_i)>\alpha\}$，其中 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant T$ 是 $[0,\ T]$ 中任一序列. 置 $B_i=\{x(t_j)\leqslant\alpha$, 对所有 $j<i$, $x(t_i)>\alpha\}$，如果 $i\neq j$ 我们有 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$，及 $B_i\cap B_j=\emptyset$. 现在令 χ_B 是 Ω 中事件(集合) B 的示性函数. 那么

$$E(x(T)\vee 0)\geqslant E(x(T)\vee 0)\chi_B$$
$$=\sum_{i=1}^{n}E[(x(T)\vee 0)\chi_{B_i}]\geqslant\sum_{i=1}^{n}E(x(T)\chi_{B_i})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}E\{E(x(T)\,|\,x(t_i))\chi_{B_i}\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}E(x(t_i)\chi_{B_i})>\alpha\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=\alpha P(B),$$

因而(2.3.8)式可由连续性得到.

最后，令

$\mathbf{w}(t)=(w_1(t),\ \cdots,\ w_n(t))$, $t\geqslant 0$,

其中 $w_1(t)$，…，$w_n(t)$是独立的一维布朗运动，称 $\mathbf{w}(t)$是 n 维**布朗运动**.

$\mathbf{w}(t)$的概率律为

$$P\{\mathbf{w}(t)\in B|\mathbf{w}(s)=\mathbf{x}\}=\int_B \frac{e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2/2(t-s)}}{[2\pi(t-s)]^{n/2}}\,d\mathbf{y}. \tag{2.3.9}$$

第三章　随机(伊藤)微积分

3.1 引　　言

在布朗运动的最简单物理模型中,常用朗之万方程(2.1.1)来描述由白噪声型的力(由于与较小的流体分子碰撞所引起)所驱动的质点的运动. (2.1.3)式给出了朗之万方程的解

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}_0e^{-\beta t}+e^{-\beta t}\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\mathbf{f}(s)ds, \qquad (3.1.1)$$

其中 $\mathbf{f}(s)$ 是白噪声项. 由第 2.1 节, 布朗运动 $\mathbf{w}(t)$ 由下式给定:

$$\mathbf{w}(t)=\frac{1}{q}\int_0^t \mathbf{f}(s)ds, \qquad (3.1.2)$$

所以 $\mathbf{f}(s)=qd\mathbf{w}(s)/ds$, 但因为 $\mathbf{w}(t)$ 是处处不可微的, 所以 $\mathbf{f}(s)$ 不是一个函数, 因此, 解(3.1.1)式不是一个严格定义的函数. 在(3.1.1)式的简单情形中, 此困难按如下方法解决. 对(3.1.1)式运用分部积分并借助于(3.1.2)式, 得到

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}_0e^{-\beta t}+q\mathbf{w}(t)-\beta q\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\mathbf{w}(s)ds. \qquad (3.1.3)$$

因为(3.1.3)式中所有函数都是严格定义的和连续的, 这样可按(3.1.3)式来解释解(3.1.2)式. 此方法可作如下推广. 令 $f(t)$ 和 $g(t)$ 对 $a\leqslant t\leqslant b$ 有定义. 对任一划分 $P: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 令

$$S_P=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(t_i)-g(t_{i-1})],$$

其中 $t_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i$. 如果存在极限 $\lim\limits_{|P|\to 0} S_P=I$, 其中

$$|P|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i-t_{i-1}),$$

称 I 是 $f(t)$ 关于 $g(t)$ 的斯蒂尔吉斯(Stieljes)积分, 表示为

$$I=\int_a^b f(t)dg(t).$$

众所周知[73], 如果 $g(t)$ 是有界变差函数, 即 $g(t)$ 是两个有限单调递增函数之差且 $f(t)$ 是连续函数, 那么 I 存在. 更进一步, 如果 $\int_a^b f(t)dg(t)$ 存在, 那么 $\int_a^b g(t)df(t)$ 也存在, 且

$$\int_a^b f(t)dg(t)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(t)df(t).$$

如果 $g(t)$ 是可微函数且 $g'(t)$ 与 $f(t)$ 是可积函数, 那么

$$\int_a^b f(t)dg(t)=\int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

回到(3.1.1)式, 对每一可微函数 $g(t)$, 定义 $\int_0^T g(s)\mathbf{f}(s)ds$ 如下

$$\begin{aligned}\int_0^t g(s)\mathbf{f}(s)ds&\equiv\int_0^t g(s)d\mathbf{w}(s)\\&\equiv g(t)\mathbf{w}(t)-\int_0^t \mathbf{w}(s)g'(s)ds.\end{aligned}$$

不幸的是, 如果 $g(t)$ 是 $\mathbf{w}(t)$ 的函数, 此方法失效. 即使在最简单的一维情况下, $\int_0^t w(t)dw(t)$ 也不能用前面的方法定义. 我们看到, 如果朗之万方程中的随机力与解有关, 例如

$$\dot{\mathbf{y}}=-\beta\mathbf{y}+q(\mathbf{y})\mathbf{f}, \tag{3.1.4}$$

那么, (3.1.4)式实质上等价于(由定义)积分方程

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}_0-\beta\int_0^t\mathbf{y}(s)ds+\int_0^t q(\mathbf{y}(s))d\mathbf{w}(s), \tag{3.1.5}$$

因为 (3.1.5) 式中最后一个积分不能用标准方法定义, 所以

(3.1.4)式没有任何意义．因而，发展随机微分方程理论的第一步应是定义随机积分．

3.2 伊藤随机积分和斯特拉脱诺维奇随机积分

下列随机积分是由伊藤给出的．令

$$\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1, \text{如果 } a\leqslant t\leqslant b,\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

是区间 $[a, b]$ 的**示性函数**．对于 $0\leqslant a<b\leqslant T$，定义

$$\int_0^T \chi_{[a,b]}(t)dw(t)=w(b)-w(a).$$

如果 $f(t)$ 是 $[0, T]$ 上阶梯函数，那么

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\chi_{[t_k,t_{k+1}]}(t),$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$．定义

$$\int_0^T f(t)dw(t)=\sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)[w(t_{k+1})-w(t_k)].$$

注意 $f(t)$ 的值是取在划分区间的左端点．函数 $f(t)$ 可以是随机函数，例如，$f(t)$ 可以是 $w(t)$ 的函数．在后一种情况下，$f(t)$ 与增量 $w(t_{k+1})-w(t_k)=\delta_k w$ 独立．对所有 $s>0$，与增量 $w(t+s)-w(t)$ 独立的函数 $f(t)$ 称为**非可料函数**．它统计地依赖于 $w(u)$ $(u\leqslant t)$，即只依赖于"过去"值．从而对于非可料阶梯函数 $f(t)$，积分 $\int_0^t f(s)dw(s)$ 也是非可料函数．以后假设随机阶梯函数 $f(t)$ 的跳跃在非随机时刻 t_k 出现．我们有下列随机积分的简单性质．令 f 和 g 是两个非可料阶梯函数，那么

(i) $\int_0^T [f(t)+g(t)]dw(t)$

$$=\int_0^T f(t)dw(t)+\int_0^T g(t)dw(t).$$

(ii) $\int_0^T cf(t)dw(t)=c\int_0^T f(t)dw(t)$,

c为任意常数.

(iii) 如果f和g满足

$$\int_0^T [Ef^2+Eg^2]dt<\infty,$$

那么

$$E\int_0^T f(t)dw(t)=0 \tag{3.2.1}$$

和

$$E\left[\int_0^T f(t)dw(t)\int_0^T g(t)dw(t)\right]=\int_0^T Ef(t)g(t)dt. \tag{3.2.2}$$

性质(i)和(ii)很易验证. 等式(3.2.1)可由$f(t)$为非可料函数的假设得到, 因为

$$\begin{aligned}E\int_0^T f(t)dw(t)&=E\sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\,\delta_k w\\&=\sum_{k=0}^{m-1} E(f(t_k)\delta_k w)\\&=\sum_{k=0}^{m-1} Ef(t_k)\,E\delta_k w=0.\end{aligned}$$

为了证明(3.2.2)式, 先从$f=g$情况开始. 于是

$$\begin{aligned}S=E\left[\int_0^T f(t)dw(t)\right]^2&=E\left[\sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\delta_k w\right]^2\\&=\sum_{k\leqslant l\leqslant m-1} E[f(t_k)\delta_k w][f(t_l)\delta_l w].\end{aligned}$$

如果$k<l$, 那么

$$E[f(t_k)\delta_k w][f(t_l)\delta_l w]=E[f(t_k)\delta_k w f(t_l)]E\delta_l w=0,$$

因为$\delta_l w$独立于$\delta_k w$, $f(t_k)$和$f(t_l)$, 这样,

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}E[f^2(t_k)(\delta_k w)^2]=\sum_{k=0}^{n-1}Ef^2(t_k)E(\delta_k w)^2$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}Ef^2(t_k)\delta t_k=\int_0^T Ef^2(t)dt,$$
其中 $\delta t_k=t_{k+1}-t_k$. 上述我们已利用了 $E[w(t_{k+1})-w(t_k)]^2=t_{k+1}-t_k$ 这一事实.

为了证明 $g\neq f$ 时的(3.2.2)式, 取 $f_1=g+f$, 于是
$$E\left[\int_0^T f_1 dw\right]^2=\int_0^T Ef_1^2 dt$$
$$=\int_0^T Ef^2 dt+2\int_0^T [Ef(t)g(t)]dt+\int_0^T Eg^2 dt,$$
但
$$E\left[\int_0^T f_1 dw\right]^2$$
$$=E\left[\int_0^T f\,dw\right]^2+2E\left[\int_0^T f\,dw\int_0^T g\,dw\right]+E\left[\int_0^T g\,dw\right]^2$$
$$=\int_0^T Ef^2\,dt+2E\left[\int_0^T f dw\int_0^T g\,dw\right]+\int_0^T Eg^2 dt.$$
因而得到(3.2.2)式.

所有非可料函数 $f(t)$ 且使得
$$\int_0^T Ef^2(t)dt<\infty$$
所组成的类用 $H_2[0, T]$ 表示. 下面将证明(第3.3* 节)对 $H_2[0, T]$中任意函数 $f(t)$, 必存在阶梯函数序列 $\{g_n(t)\}$ 使得当 $n\to\infty$ 时, 几乎处处成立
$$\int_0^T |f(t)-g_n(t)|^2 dt\to 0,$$
而且当 $n\to\infty$ 时, 对于 $t\in[0, T]$, 几乎处处一致成立
$$\int_0^t g_n(s)dw(s)\to L(t)\text{(极限)}. \tag{3.2.3}$$

我们定义

$$\int_0^t f(s)dw(s) = L(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{3.2.4}$$

因为对于每一 n, $\int_0^t g_n(s)dw(s)$ 是连续函数(为什么?)且(3.2.3)式中的收敛是一致收敛，所以积分 $\int_0^t f(s)dw(s)$ 是 t 的几乎处处连续函数. 容易证明积分(3.2.4)与逼近序列 $\{g_n(t)\}$ 无关. 伊藤积分(3.2.4)的性质与熟知的黎曼积分性质有很大区别.

习题 3.2.1[65]

令 $L^2[0, \infty]$ 是 $[0, \infty)$ 上所有平方可积实函数集. 如果 f 和 g 是 $L^2[0, \infty]$ 中的元素，那么 $\langle f, g\rangle = \int_0^\infty fg\,dt$ 和 $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$ 分别是**内积**和**范数**. $L^2[0, \infty]$ 上保持内积的变换 ν 叫做**正交变换**，即对所有 f, $g \in L^2[0, \infty]$ 有 $\langle \nu(f), \nu(g)\rangle = \langle f, g\rangle$. 例如取 $\nu(f) = f$ 的傅里叶变换，根据帕塞伐尔(Parseval)等式，ν 是正交变换. 证明如果 ν 是正交变换，那么映射

$$\varphi(w(t)) = \int_0^\infty \nu(\chi_{[0,t]}(s))dw(s) \tag{3.2.5}$$

将布朗轨道映射为布朗轨道.

[提示：运用(3.2.2)式且假设积分(3.2.5)存在.]

显然，如果 $f(t)$ 是确定的光滑函数，积分 $\int_0^T f(t)dw(t)$ 是斯蒂尔吉斯积分，因而

$$\int_a^b f(t)dw(t) \overset{\text{a.s.}}{=\!=} f(b)w(b) - f(a)w(a) - \int_a^b w(t)f'(t)dt. \tag{3.2.6}$$

习题 3.2.2

求积分(3.2.6)的概率密度.

下一步我们计算一些有用的积分．首先考虑积分

$$\int_a^b w(t)dw(t). \tag{3.2.7}$$

因为 $w(t)$ 是几乎处处连续函数，下列阶梯函数

$$w_n(t)=\sum_{i=0}^{n-1} w(t_i)\chi_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$$

在 $[a, b]$ 中一致收敛于 $w(t)$，其中 $t_i=a+i[(b-a)/n]$，$i=0$，$\cdots$，n．$w_n(t)$ 的积分为

$$I_n=\int_a^b w_n(t)dw(t)=\sum_{i=0}^{n-1} w(t_i)[w(t_{i+1})-w(t_i)].$$

因而

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\{w^2(t_{i+1})-w^2(t_i)-[w(t_{i+1})-w(t_i)]^2\} \\ &= \frac{1}{2}[w^2(b)-w^2(a)]-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\delta_i w)^2, \end{aligned}$$

其中 $\delta_i w=w(t_{i+1})-w(t_i)$．令

$$\eta_n=\sum_{i=0}^{n-1}(\delta_i w)^2,$$

于是有 $\quad E\eta_n=\sum_{i=0}^{n-1}E(\delta_i w)^2=\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)=b-a.$

我们将证明当 $n\to\infty$ 时，依概率有 $\eta_n\to b-a$．事实上，因为 $(\delta_i w)^2$ 是独立随机变量，故

$$\mathrm{Var}\,\eta_n=\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Var}(\delta_i w)^2.$$

这样，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,\eta_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\{E(\delta_i w)^4-[E(\delta_i w)^2]^2\} \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}E(\delta_i w)^4. \end{aligned}$$

因为 $\delta_i w$ 是 $N(0, \sqrt{t_{i+1}-t_i})$，故有

$$E(\delta_i w)^4=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4e^{-x^2/2(t_{i+1}-t_i)}}{\sqrt{2\pi(t_{i+1}-t_i)}}dx=3(t_{i+1}-t_i)^2.$$

由切比晓夫不等式(见第一章)，当 $n\to\infty$ 时有

$$P\{|\eta_n-E\eta_n|>\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathrm{Var}\eta_n}{\varepsilon^2}\leqslant\frac{3}{\varepsilon^2}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^2$$

$$=\frac{3}{\varepsilon^2}\frac{(b-a)^2}{n}\to 0.$$

所以当 $n\to\infty$ 时，依概率有 $\eta_n\to E\eta_n=b-a$. 由此得出

$$\int_a^b w_n(t)dw(t)\to\frac{1}{2}[w^2(b)-w^2(a)]-\frac{1}{2}(b-a);$$

因而

$$\int_a^b w(t)\,dw(t)=\frac{1}{2}[w^2(b)-w^2(a)]-\frac{1}{2}(b-a),\tag{3.2.8}$$

这与经典积分不同。

在对物理现象建立模型时还用到其他类型积分. 例如考虑**后向积分**

$$(B)\int_0^T f(w(t))dw(t)$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(w(t_{i+1}))[w(t_{i+1})-w(t_i)],$$

其中 $$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T,$$

$\delta=\max(t_{i+1}-t_i)$. 如果 $f(x)$ 是光滑函数，那么

$$f(w(t_{i+1}))=f(w(t_i))+[w(t_{i+1})-w(t_i)]f'(w(t_i))$$

$$+\frac{[w(t_{i+1})-w(t_i)]^2f''(\xi_i)}{2},$$

其中 ξ_i 是 $w(t_i)$ 与 $w(t_{i+1})$ 之间的一个(随机)数. 和式

$$S=\sum_{i=0}^{n-1}[w(t_{i+1})-w(t_i)]^2f'(w(t_i))$$

收敛于
$$\int_0^T f'(w(t))dt.$$
因为当 $\delta \to 0$ 时，
$$\begin{aligned} ES &= \sum_{i=0}^{n-1} E\, f'(w(t_i)) E(w(t_{i+1}) - w(t_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) E\,'(w(t_i)) \to \int_0^T E\, f'(w(t))dt \\ &= E\int_0^T f'(w(t))dt. \end{aligned}$$
类似于(3.2.8)式的推导过程，当 $\delta \to 0$ 时，有 $\operatorname{Var} S \to 0$，因而由切比晓夫不等式得到 $S - ES \to 0$. 和式
$$T = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{[w(t_{i+1}) - w(t_i)]^3 f''(\xi_i)}{2}$$
收敛于零，因为
$$\begin{aligned} E|T| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{E|w(t_{i+1}) - w(t_i)|^3 |f''(\xi_i)|}{2} \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \{E|w(t_{i+1}) - w(t_i)|^6 E|f''(\xi_i)|^2\}^{1/2} \\ &\leqslant C \sum_{i=0}^{n-1} \{(t_{i+1} - t_i)^3 E|f''(\xi_i)|^2\}^{1/2} \\ &\leqslant \delta^{1/2} C \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\{E|f''(\xi_i)|^2\}^{1/2}, \end{aligned}$$
其中 C 是一个与 $f(x)$ 无关的常数. 因为右边的和式收敛于
$$\int_0^T \{E|f''(w(t))|^2\}^{1/2}\, dt < \infty,$$
所以当 $\delta \to 0$ 时，可得出 $E|T| \to 0$，类似地有 $\operatorname{Var}|T| \to 0$. 故
$$\begin{aligned} &(B)\int_0^T f(w(t))dw(t) \\ &\quad = \int_0^T f(w(t))dw(t) + \int_0^T f'(w(t))dt. \end{aligned}$$

习题 3.2.3

求值

$$(B)\int_0^T w(t)dw(t).$$

习题 3.2.4

定义二阶积分

$$\int_0^T f(t)[dw(t)]^2=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[w(t_{i+1})-w(t_i)]^2.$$

证明

$$\int_0^T f(t)[dw(t)]^2=\int_0^T f(t)dt.$$

(见文献[38])

习题 3.2.5

类似地定义 $I_n=\int_0^T f(t)[dw(t)]^n$. 证明对于 $n>2$ 有 $I_n=0$.

另一类随机积分是斯特拉脱诺维奇(Stratonovich)积分[65]. 对于 $w(t)$ 的显函数,其积分定义为

$$(S)\int_0^T f(w(t),\ t)dw(t)$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{w(t_i)+w(t_{i+1})}{2},\ t_i\right)[w(t_{i+1})-w(t_i)].$$

习题 3.2.6

假设 $f(x,\ t)$ 是光滑函数,运用后向积分的讨论方法证明

$$(S)\int_0^T f(w(t),t)dw(t)=\int_0^T f(w(t),\ t)dw(t)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T f_x(w(t),\ t)dt,$$

其中 $$f_x(x, t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x, t).$$

习题 3.2.7

证明：$(S)\int_0^T w(t)\,dw(t)=\frac{w^2(T)}{2}$.

斯特拉脱诺维奇积分满足经典积分的所有形式规则，例如积分的基本定理

$$(S)\int_a^b f'(w)dw=f(w(b))-f(w(a)), \qquad (3.2.9)$$

及分部积分和其他性质．我们将证明 (3.2.9) 式成立．假设 $f(x)$ 有三阶连续导数 f', f'' 和 f'''．那么根据中值定理，有

$$f'\left(\frac{w(t_i)+w(t_{i+1})}{2}\right)[w(t_{i+1})-w(t_i)]$$
$$=f(w(t_{i+1}))-f(w(t_i))-\frac{[w(t_{i+1})-w(t_i)]^3}{12}f'''(\xi_i), \qquad (3.2.10)$$

其中 ξ_i 是 $w(t_i)$ 与 $w(t_{i+1})$ 之间的一个点．对 i 求和且取极限，可看到(3.2.10)式右边的前两项产生(3.2.9)式，而最后一项的和式与习题 3.2.5 一样收敛于零．

习题 3.2.8

证明：斯特拉脱诺维奇积分满足分部积分和变量变换规则．

习题 3.2.9

证明：和式

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{[f(w(t_i), t_i)+f(w(t_{i+1}), t_{i+1})][w(t_{i+1})-w(t_i)]}{2}$$

能导出斯特拉脱诺维奇积分．

习题 3.2.10

运用和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(w(t_i)\lambda+w(t_{i+1})(1-\lambda),\ t_i)[w(t_{i+1})-w(t_i)]$$

定义积分 $(\lambda)\int_a^b f dw$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$。对于 $\lambda=1$ 得到伊藤定义；对于 $\lambda=\frac{1}{2}$，得到斯特拉脱诺维奇定义；对于 $\lambda=0$ 重新得到后向积分。求 $(\lambda)\int_a^b f dw$ 和 $\int_a^b f dw$ 之间的关系。

下一节讨论斯特拉脱诺维奇积分的进一步性质以及用伊藤随机积分和斯特拉脱诺维奇随机积分对物理现象建模的问题。

3.3* 随机积分的构造

令 $\mathscr{F}_t$ 为 $w(s)\ (s\leqslant t)$ 生成的 Ω 子集的 σ-代数。这样，$\mathscr{F}_t$ 是包含所有事件 $\{w(s)<a\}$ 的最小 σ-代数，其中 $0\leqslant s\leqslant t$，$a=$ 实数。一个随机函数 $f(t)$ 如果关于 $\mathscr{F}_t$ 是可测的，称它为非可料的。特别，非可料函数 $f(t)$ 对所有 $s>0$ 与 $w(t+s)-w(t)$ 独立。如果 $f(t)\in H_2[0,\ T]$，则显然有 $P\left[\int_0^T f^2(t)dt<\infty\right]=1$。对于 $H_2[0,\ T]$ 中非可料阶梯函数已在第 3.2 节中定义了随机积分。我们将首先证明 $H_2[0,\ T]$ 中简单函数的随机积分有下列性质：

$$h(t)=\exp\left[\int_0^t f(s)dw(s)-\frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right]$$

是鞅。事实上，如果 $f(t)$ 是常数，那么 $\int_0^t f(s)\,dw(s)=cw(t)$。已在第 2.3* 节中证明过 $\exp[cw(t)-(c^2/2)t]$ 是鞅且

$$E\exp\left[cw(t)-\frac{c^2}{2}t\right]=1.$$

如果$f(t)$是阶梯函数，可以分别在不同区间中考虑时间变动，同样可以证明此亦为真. 下一步导出一个有用的不等式. 令$f(t)$是$H_2[0, T]$中的简单函数，那么

$$P\left[\max_{t\le 1}\left(\int_0^t f(s)dw(s)-\frac{\alpha}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right)>\beta\right]\le e^{-\alpha\beta}. \tag{3.3.1*}$$

因为用$\alpha f(t)$代替$f(t)$，可看到(3.3.1*)式等价于

$$P\left[\max_{t\le 1}\left(\int_0^t \alpha f(s)dw(s)-\frac{1}{2}\int_0^t [\alpha f(s)]^2ds\right)>\alpha\beta\right]$$
$$=P\left[\max_{t\le 1}h(t)>e^{\alpha\beta}\right],$$

其中$h(t)$是鞅. 运用鞅不等式(2.3.8)，得到

$$P\left[\max_{t\le 1}h(t)>e^{\alpha\beta}\right]\le e^{-\alpha\beta}Eh(1)=e^{-\alpha\beta},$$

因而得到(3.3.1*)式.

引理 如果$\{f_n(t)\}$是$H_2[0, T]$中简单函数序列且

$$P\left[\int_0^1 f_n^2(s)ds>2^{-n}\text{ i. o. }\right]=0,$$

那么对任意$\nu>1$有

$$P\left[\max_{t\le 1}\left|\int_0^t f_n(s)dw(s)\right|\ge\nu(2^{-n+1}\log n)^{1/2}\text{ i.o.}\right]=0. \tag{3.3.2*}$$

证明 置$\alpha=(2^{n+1}\log n)^{1/2}$和$\beta=\nu(2^{-n-1}\log n)^{1/2}$，有

$$P\left[\max_{t\le 1}\int_0^t f_n(s)dw(s)\ge\nu(2^{-n+1}\log n)^{1/2}\right]$$
$$<P\left[\max_{t\le 1}\int_0^t f_n(s)dw(s)-\frac{\alpha}{2}\int_0^1 f_n^2(s)ds\ge 2\beta\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{2}\int_0^1 f_n^2(s)ds\right]$$

$$\leqslant P\left[\max_{t\leq 1}\left(\int_0^t f_n(s)dw(s)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha}{2}\int_0^t f_n^2(s)ds\right)\geqslant 2\beta-2^{-n-1}\alpha\right]$$

$$\leqslant P\left[\max_{t\leq 1}\left(\int_0^t f_n(s)dw(s)-\frac{\alpha}{2}\int_0^t f_n^2(s)ds\right)\right.$$

$$\geqslant \nu(2^{-n+1}\log n)^{1/2}-(2^{-n-1}\log n)^{1/2}$$

$$\left.-(2\nu-1)(2^{-n-1}\log n)^{1/2}\right]$$

$$\leqslant e^{-(2\nu-1)\log n}=n^{-(2\nu-1)},$$

对无限多个 n 此不等式成立. 现在, 因为 $2\nu-1>\nu>1$, 故有 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2\nu-1)}<\infty$, 因而由波莱尔-康特立引理和对 $f_n(t)$ 的所假设的估计可得(3.3.2*)式. 下一步, 对 $H_2[0, T]$ 中每一函数 $f(t)$ 构造一个阶梯函数 $f_n(t)$ 序列, 使得 $f_n\to f$ 且 $\int_0^t f_n(s)ds$ 一致收敛于一极限. 因为 $f(t)$a.s. 关于 t 可积, 它几乎处处等于它的积分的导数. 因而, 置 $\tilde{f}_k(t)=2^k\int_{t-2^{-k}}^t f(s)\,ds$, 其中当 $s<0$ 时 $f(s)=0$, 当 $k\to\infty$ 时, 有 $\tilde{f}_k\xrightarrow{\text{a.s.}}f(t)$. 因为 $\tilde{f}_k(t)$ 是绝对连续函数, 故当 $m\to\infty$ 时, 逼近阶梯函数 $\tilde{f}_{m,k}(t)=\tilde{f}_k(2^{-m}[2^m t])$ 一致收敛于 $\tilde{f}_k(t)$. 其中 $[x]$ 是小于或等于 x 的最大整数. 因为当 $m\to\infty$ 与 $k\to\infty$ 时,

$$\int_0^1[f(t)-\tilde{f}_{m,k}(t)]^2dt\xrightarrow{\text{a.s.}}0,$$

对于每一 n 能找到一对足标 m, k 使得

$$P\left[\int_0^1(f(t)-\tilde{f}_{m,k}(t))^2dt>2^{-n+1}\right]<2^{-n}.$$

定义 $f_n(t)=\tilde{f}_{m,k}(t)$, 由波莱尔-康特立引理得到

$$P\left[\int_0^1 (f(t)-f_n(t))^2\,dt>2^{-n-1}\ \text{i.o.}\right]=0,$$

因而 $$P\left[\int_0^1 (f_n(t)-f_{n-1}(t))^2\,dt>2^{-n}\text{i.o.}\right]=0.$$

由引理得到

$$P\left[\max_{t\leq 1}\left|\int_0^t [f_n(s)-f_{n-1}(s)]\,dw(s)\right|\right.$$
$$\left.\geq \nu(2^{-n+1}\log n)^{1/2}\ \text{i.o.}\right]=0,$$

因而当 $n\to\infty$ 时，$\int_0^t f_n(t)dw(t)$ 几乎处处一致收敛于一个极限，所以我们取

$$\int_0^t f(s)dw=\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(s)dw(s). \qquad (3.3.3^*)$$

容易证明此极限与逼近序列无关. 因为每一积分 $\int_0^t f_n(s)dw(s)$ 是连续函数，而且(3.3.3*)式中的收敛是一致收敛，故积分 $\int_0^t f(s)dw(s)$ 是 a.s. 连续函数.

习题 3.3.1*

证明极限(3.3.3*)式与逼近序列无关.

习题 3.3.2*

用阶梯函数逼近方法证明：如果

$$P\left[\int_0^\infty f^2(t)\,dt<\infty\right]=1,$$

那么 $\int_0^\infty f(t)dt$ 可如下定义

$$P\left[\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(s)ds=\int_0^\infty f(t)dt\right]=1.$$

习题 3.3.3*

令 $f\in H_2[0,\ T]$，证明

$$h(t)=\exp\left[\int_0^t f(s)\,dw(s)-\frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\,ds\right]$$

是上鞅且 $Eh(t)\leqslant 1$. [65] 中给了一个例子，其中 $Eh(t)<1$. 上鞅的定义是将(2.3.6)式中最后一个等式换为"小于或等于"的不等式。

习题 3.3.4*

对所有 $f_n\in H_2[0, T]$，证明引理。

习题 3.3.5*

证明：如果

$$E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2\,dt\right)<\infty,$$

则

$$E\exp\left[i\int_0^\infty f\,dw(t)+\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2\,dt\right]=1.$$

习题 3.3.6*

证明

$$\zeta(t)=\int_0^t f(s)\,dw(s)$$

是鞅.

3.4 随机微分和伊藤公式

令 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是 $H_2[0, T]$ 中函数. 令 $x(t)$ 是随机过程，且对所有 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$ 满足

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2} b(t)\,dw(t),$$

则称 $x(t)$ 有随机微分

$$dx(t)=a(t)\,dt+b(t)\,dw(t). \tag{3.4.1}$$

例如，如果令 $x(t)=w^2(t)$，那么由(3.2.8)式，

$$w^2(t_2)-w^2(t_1)=2\int_{t_1}^{t_2} w(t)\,dw(t)+\int_{t_1}^{t_2} 1\,dt, \tag{3.4.2}$$

因而 $$dw^2(t)=1dt+2w(t)dw(t).$$
这样 $a(t)=1$ 和 $b(t)=2w(t)$. 如果 $f(t)$ 是确定的光滑函数，那么由(3.2.6)式，

$$\begin{aligned}&f(t_2)w(t_2)-f(t_1)w(t_1)\\&\quad=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dw(t)+\int_{t_1}^{t_2}w(t)f'(t)dt,\end{aligned}$$

因而

$$d[f(t)w(t)]=f(t)dw(t)+w(t)df(t), \qquad (3.4.3)$$

其中 $df(t)=f'(t)dt$.

习题 3.4.1

证明：如果 $x(t)$ 有下列微分

$$dx(t)=a(t)dt+b(t)dw(t),$$

而且 $f(t)$ 是光滑的确定函数，那么，

$$d[x(t)f(t)]=x(t)df(t)+f(t)dx(t).$$

下一步导出计算乘积的微分规则. 令 $dx_i(t)=a_i(t)dt+b_i(t)dw(t)\ (i=1,\ 2)$，其中 $a_i(t)$ 和 $b_i(t)$ 是 $H_2[0,\ T]$ 中的函数. 首先考虑最简单的情况，a_i 和 b_i 是常数。那么 $x_i(t)=x_i(0)+a_it+b_iw(t)\ (i=1,\ 2)$，因而

$$\begin{aligned}x_1(t)x_2(t)=x_1(0)x_2(0)&+[x_1(0)a_2+x_2(0)a_1]t\\&+[x_1(0)b_2+x_2(0)b_1]w(t)+a_1a_2t^2\\&+[a_1b_2+a_2b_1]tw(t)+b_1b_2w^2(t).\end{aligned}$$

取微分，由(3.4.2)式和(3.4.3)式有

$$\begin{aligned}d[x_1(t)x_2(t)]&=[x_1(0)a_2+x_2(0)a_1+2a_1a_2t\\&\qquad+(a_1b_2+a_2b_1)w(t)+b_1b_2]dt\\&\qquad+[(a_1b_2+a_2b_1)t+2b_1b_2w(t)]dw(t)\\&=x_1(t)dx_2(t)+x_2(t)dx_1(t)+b_1b_2dt.\end{aligned} \qquad (3.4.4)$$

对于 $H_2[0, T]$ 中所有阶梯函数 $a_i(t)$ 和 $b_i(t)$，公式(3.4.4)也必成立，因而对于 $H_2[0, T]$ 中任意函数 $a_i(t)$ 和 $b_i(t)$ 运用阶梯函数逼近，得到对于 $H_2[0, T]$ 中所有函数 $a_i(t)$ 和 $b_i(t)$，(3.4.4)式也成立. 乘积规则

$$d[x_1(t)x_2(t)]=x_1(t)dx_2(t)+x_2(t)dx_1(t)+b_1(t)b_2(t)dt \tag{3.4.5}$$

与经典的乘积规则不同点在于多一附加项 $b_1(t)b_2(t)dt$.

下一步，计算 $w(t)$ 的任意多项式的微分. 运用数学归纳法，从(3.4.2)式和(3.4.5)式得到，对任意 $m\geqslant 2$ 有

$$dw^m(t)=m[w(t)]^{m-1}dw(t)+\frac{m(m-1)}{2}[w(t)]^{m-2}dt.$$

由此得到，对任意多项式 $P(x)$ 有

$$dP(w(t))=P'(w(t))dw(t)+\frac{1}{2}P''(w(t))dt. \tag{3.4.6}$$

因为在任意有界区间上，任意二次连续可微函数 $f(t)$ 与它的导数 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 可被一致逼近，因而对所有二次连续可微函数 $P(x)$，(3.4.6)式成立.

习题 3.4.2

对上一推理补充缺少的细节.

下一步导出随机微分的链规则. 我们从形如 $\Phi(x, t)=\phi(x)g(t)$ 的函数开始，其中 g' 和 ϕ'' 是连续函数. 这样，由(3.4.5)式得到

$$\begin{aligned}d\Phi(w(t), t)&=\phi(w(t))g'(t)dt+g(t)d\phi(w(t))\\&=\left[\phi(w(t))g'(t)+\frac{1}{2}g(t)\phi''(w(t))\right]dt\\&\quad+g(t)\phi'(w(t))dw(t),\end{aligned}$$

即

$$d\Phi(w(t), t)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}(w, t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(w, t)\right]dt$$
$$+\frac{\partial\Phi(w, t)}{\partial x}dw(t). \tag{3.4.7}$$

因为任意光滑函数 $\Phi(x, t)$ 在 R^2 的紧子集上可用"退化"函数

$$\Phi_n(x, t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(t)\phi_k(x)$$

一致逼近，我们得出对所有光滑函数 $\Phi(x, t)$，(3.4.7)式成立。注意，如果 $\Phi(x, t)$ 是非可料随机函数，(3.4.7)式成立。

最后用任意可微分过程代替 $w(t)$．令 $x(t)$ 是一随机过程，它的微分给定为

$$dx(t)=a(t)dt+b(t)dw(t),$$

其中 $a, b\in H_2[0, T]$，且令 $f(x, t)$ 是一光滑函数．首先假设

$$x(t)=x_0+at+bw(t),$$

其中 x_0, a 和 b 是常数．那么

$$f(x(t), t)=f(x_0+at+bw(t), t)\equiv\Phi(w(t), t),$$

其中 $\Phi(x, t)=f(x_0+at+bx, t)$．我们有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=b\frac{\partial f}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=b^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z, t)\Big|_{z=x_0+at+bx}.$$

由(3.4.7)式得到

$$\begin{aligned}df(x(t), t)&=d\Phi(w(t), t)\\&=\left[\frac{\partial f}{\partial t}(x(t), t)+a\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t), t)\right]dt\\&\quad+b\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t)dw(t).\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

因此，如果 a 和 b 是 $H_2[0, T]$ 中阶梯函数，(3.4.8)式成立．对于 $H_2[0, T]$ 中所有函数 $a(t)$ 和 $b(t)$，用逼近法可知(3.4.8)式也成立．等式(3.4.8)称为**伊藤公式**．它用附加项

$$\frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt$$

修正了经典的链规则

$$df(x(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a dt + b dw) + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

对于多变量函数，有下列推广的伊藤公式．令 $\mathbf{a}(t) = [a_1(t), \cdots, a_n(t)]^T$ 是一向量，$\mathbf{B}(t) = \{b_{ij}(t)\}_{i,j<n}$ 是元素为函数的矩阵．令 $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), \cdots, w_n(t)]^T$ 是独立布朗运动的向量．假设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{B}$ 关于 $\mathbf{w}(t)$ 是非可料的．令 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)]^T$ 是可微分过程组成的向量且假设

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(t) dt + \mathbf{B}(t) d\mathbf{w}.$$

如果 $f(\mathbf{x}, t)$ 是 $n+1$ 个变量 $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ 和 t 的光滑函数，那么伊藤公式给定为

$$df(\mathbf{x}(t), t) = \Big[\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{a}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}(t), t)$$

$$+ \sum_{i,j<n} \sigma_{ij}(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)\Big] dt$$

$$+ \sum_{i,j<n} B_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t), t) dw_j, \qquad (3.4.9)$$

其中，$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{ij}$.

习题 3.4.3

给出(3.4.9)式的推导细节．

习题 3.4.4

证明

$$E\left[\int_0^t f(s)\,dw(s)\right]^{2m}=\frac{2m(2m-1)}{3}\int_0^t E\left[\int_0^s f(r)dw(r)\right]^{2m-2}f^2(s)ds$$

$$\leqslant\left[\frac{m}{2}(2m-1)\right]^{m-1}t^{m-1}\int_0^t Ef^{2m}(s)ds.$$

[提示：对 $\varphi(x)=x^{2m}$ 和 $x(t)=\int_0^t f(s)dw(s)$ 运用伊藤公式。运用荷尔德(Hölder)不等式。]

斯特拉脱诺维奇积分的链规则是经典规则

$$d_s f(x(t),\ t)=f_t(x(t),\ t)dt+f_x(x(t),\ t)d_s x(t). \tag{3.4.10}$$

事实上，令 $x(t)$ 是可微分过程，即假设在伊藤意义下有

$$dx(t)=a(t)dt+b(t)dw(t).$$

那么，由伊藤公式，

$$f(x(t),\ t)=f(x(t_0),\ t_0)+\int_{t_0}^t\Big[f_t(x(s),\ s)$$

$$+a(s)f_x(x(s),\ s)+\frac{1}{2}b^2(s)f_{xx}(x(s),s)\Big]ds$$

$$+\int_{t_0}^t b(s)f_x(x(s),\ s)dw(s). \tag{3.4.11}$$

运用习题 3.2.6 的结果，有

$$\int_{t_0}^t b(s)f_x(x(s),\ s)\,dw(s)=(S)\int_{t_0}^t b(s)f_x(x(s),\ s)dw(s)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t\frac{\partial}{\partial w(s)}[b(s)f_x(x(s),\ s)]ds. \tag{3.4.12}$$

首先有 $dt/dw(t)=0$，因为当 $\Delta t\to 0$ 时，

$$P\left(\left|\frac{\Delta t}{\Delta w}\right|>\varepsilon\right)=P\left(|\Delta w|<\frac{\Delta t}{\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\int_{-\Delta t/\varepsilon}^{\Delta t/\varepsilon}e^{-x^2/2\Delta t}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{\Delta t}/\varepsilon}^{\sqrt{\Delta t}/\varepsilon}e^{-z^2/2}dz\to 0.$$

由此得出当 $\Delta t\to 0$ 时，依概率有 $\Delta t/\Delta w\to 0$. 因而对光滑函数 $b(s)$ 有

$$\frac{db(s)}{dw(s)}=\frac{db(s)}{ds}\frac{ds}{dw(s)}=0$$

且
$$\frac{df_x(x(s),\ s)}{dw(s)}=f_{xx}(x(s),\ s)\frac{dx(s)}{dw(s)}.$$

现在
$$\Delta x(t)=a(t)\Delta t+b(t)\Delta w(t)+o(\Delta t),$$

所以当 $\Delta t\to 0$ 时，

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta w(t)}=a(t)\frac{\Delta t}{\Delta w(t)}+b(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta w(t)}\to b(t).$$

由此得出
$$\frac{dx(s)}{dw(s)}=b(s),$$

因而

$$\frac{\partial b(s)f_x(x(s),\ s)}{\partial w(s)}=b^2(s)f_{xx}(x(s),\ s)+f_x(x(s),\ s)\frac{\partial b(s)}{\partial w(s)}. \tag{3.4.13}$$

把(3.4.13)式代入(3.4.12)式，然后把(3.4.12)式代入(3.4.11)式，得到

$$f(x(t),\ t)=f(x(t_0),\ t_0)+\int_{t_0}^{t}\Big[f_t(x(s),\ s)$$
$$+\left(a(s)-\frac{\partial b(s)}{\partial w(s)}\right)f_x(x(s),\ s)\Big]ds$$
$$+(S)\int_{t_0}^{t}b(s)f_x(x(s),\ s)dw(s),$$

因而得出(3.4.10)式。

习题 3.4.5

假设

$$dx(t)=a(x(t),\ t)dt+b(x(t),\ t)d_s w(t).$$

在这种情况下，(3.4.10)式是否成立？

习题 3.4.6

令 $x(t)=e^{w(t)}$，运用习题 3.2.6 和(3.4.4)式证明在斯特拉脱诺维奇意义下有 $dx(t)=x(t)\,dw(t)$，在伊藤意义下有 $dx(t)=x(t)\,dw(t)+\frac{1}{2}x(t)dt$。从伊藤公式导出这个结果.

习题 3.4.7

伊藤公式给出了一个计算 $Ee^{w(t)}$ 的简单方法，因为

$$e^{w(t)}=1+\frac{1}{2}\int_0^t e^{w(s)}\,ds+\int_0^t e^{w(s)}\,dw(s),$$

从而有

$$Ee^{w(t)}=1+\frac{1}{2}\int_0^t Ee^{w(s)}ds,$$

由此得

$$Ee^{w(t)}=e^{t/2}.$$

运用相同的方法计算 $\mathrm{Var}\,e^{w(t)}$，$Ee^{iw(t)}$，$\mathrm{Var}\sin w(t)$和 $\mathrm{Var}\cos w(t)$.

习题 3.4.8

令 $dx(t)=a(t)dt+b(t)dw(t)$，其中 $a(t)$和 $b(t)$是确定函数. 求 $x(t)$ 的分布函数且用伊藤公式计算

$$Ex(t),\ \mathrm{Var}x(t),\ E[x(t)-Ex(t)]^n\quad (n=3,\ 4,\ \cdots).$$

习题 3.4.9

令 $w_1(t)$和 $w_2(t)$是独立的布朗运动且 $x(t)$是非可料过程. 令 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$是可微分过程使得

$$du_1(t)=-\sin x(t)dw_1+\cos x(t)dw_2$$

$$du_2(t)=\cos x(t)dw_1+\sin x(t)dw_2.$$

证明 $u_1(t)$和 $u_2(t)$是独立的布朗运动[92].

第四章　随机微分方程

4.1　基本理论和线性方程

随机微分方程

$$dx(t)=a(x(t),\ t)dt+b(x(t),\ t)dw(t),\quad x(0)=x_0 \tag{4.1.1}$$

是由伊藤积分方程

$$x(t)=x_0+\int_0^t a(x(s),\ s)ds+\int_0^t b(x(s),\ s)dw(s) \tag{4.1.2}$$

定义。

这样，(4.1.1) 式的解是非可料函数 $x(t)$，使得 $|a(x(t),\ t)|^{1/2}$ 和 $b(x(t),\ t)$ 属于 $H_2[0,\ T]$，且满足 (4.1.2) 式．对于方程组

$$d\mathbf{x}(t)=\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\ t)dt+\mathbf{B}(\mathbf{x}(t),\ t)d\mathbf{w}(t) \tag{4.1.3}$$

可以同样定义，其中

$$\mathbf{x}=[x_1,\ \cdots,\ x_n]^T,\ \mathbf{a}=[a_1,\ \cdots,\ a_n]^T$$

且 $\mathbf{w}(t)=[w_1(t),\ \cdots,\ w_n(t)]^T$ 是独立布朗运动组成的向量．随机微分方程的最简单例子是方程

$$dx(t)=a(t)dt+b(t)dw(t),\ x(0)=x_0. \tag{4.1.4}$$

其解为

$$x(t)=x_0+\int_0^t a(s)ds+\int_0^t b(s)dw(s).$$

为了阐明解的本质，我们计算 $x(t)$ 的转移概率密度，即函数

$p(x, s, y, t)$使得

$$P(x(t)\in A|x(s)=x)=\int_A p(x, s, y, t)dy \quad (t>s),$$

其中 A 是 R 中任意集合. 假定 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是确定函数. 随机积分 $\zeta(t)=\int_0^t b(s)dw(s)$ 是独立正态变量线性组合 $\sum b(t_i)[w(t_{i+1})-w(t_i)]$ 的极限, 因而积分也是正态变量. 这样,

$$\zeta(t)=x(t)-x_0-\int_0^t a(s)ds$$

是正态变量, 因而

$$p(x, s, y, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\,e^{-(y-\mu)^2/2v},$$

其中
$$\mu=E(x(t)\,|\,x(s)=x).$$

由此得到 $E(x(t)\,|\,x(s)=x)=x+\int_s^t a(u)\,du$ 作为随机积分的期望等于零. 同样有

$$v=\mathrm{Var}x(t)=E\left[\int_s^t b(u)dw(u)\right]^2=\int_s^t b^2(u)du.$$

因而

$$p(x, s, y, t)=\left[2\pi\int_s^t b^2(u)du\right]^{-1/2}\times\exp\left[\frac{-\left(y-x-\int_s^t a(u)du\right)^2}{2\int_s^t b^2(u)du}\right].$$

习题 4.1.1

证明(4.1.4)式解的转移概率密度 $p(x, s, y, t)$ 是抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}b^2(t)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}-a(t)\frac{\partial p}{\partial y},\ t>s,$$
$$p(x, s, y, t)\to\delta(x-y),\quad 当\ t\downarrow s$$

的解.

习题 4.1.2

求 $p(x, s, y, t)$ 关于"后向变量"(x, s)所满足的偏微分方程.

下一步考虑经过变量变换能化为 (4.1.4) 式的随机微分方程、考虑变量变换 $\zeta(t)=f(x(t), t)$, 其中 $x(t)$ 是(4.1.1)式的解,那么由伊藤公式,

$$d\zeta(t)=\Big[\frac{\partial f}{\partial t}(x(t), t)+a(x(t), t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t)$$
$$+\frac{1}{2}b^2(x(t), t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t), t)\Big]dt$$
$$+b(x(t), t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t)dw(t). \qquad (4.1.5)$$

假设 $f(x, t)$ 有(关于 x 的)反函数 $g(x, t)$, 于是

$$f(g(x, t), t)=x,\ g(f(x, t), t)=x$$

那么 $x(t)=g(\zeta(t), t)$, 因而(4.1.5)式可写为

$$d\zeta(t)=\bar{a}(\zeta(t), t)dt+\bar{b}(\zeta(t), t)dw(t) \qquad (4.1.6)$$

其中

$$\bar{a}(x, t)=\frac{\partial f}{\partial t}(g(x, t), t)+a(g(x, t), t)\frac{\partial f}{\partial x}(g(x,t),t)$$
$$+\frac{1}{2}b(g(x, t), t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(x, t), t),$$

$$\bar{b}(x, t)=b(g(x, t), t)\frac{\partial f}{\partial x}(g(x, t), t).$$

如果能找到函数 $f(x, t)$ 使得

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)+a(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)+\frac{1}{2}b^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\bar{a}(t) \qquad (4.1.7)$$

(与 x 无关)且

$$b(x,\ t)\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)=\bar{b}(t), \qquad (4.1.8)$$

那么，运用 $g(x,\ t)=x$ [因为(4.1.7)式和(4.1.8)式两边都与 x 无关]，由(4.1.6)～(4.1.8)式，方程(4.1.1)式可化为(4.1.4)式。

为了得到可化条件，运用(4.1.8)式得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)=\frac{\bar{b}(t)}{b(x,\ t)}.$$

下一步对(4.1.7)式求关于 x 的导数得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,\ t)\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)+\frac{1}{2}b^2(x,\ t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]=0.$$

因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\bar{b}(t)}{b(x,\ t)}\right]$$

$$=\frac{[\partial\bar{b}(t)/\partial t]\,b(x,\ t)-\bar{b}(t)\,[\partial b(x,\ t)/\partial t]}{b^2(x,\ t)}$$

且 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\bar{b}(t)}{b(x,\ t)}\right]=-\bar{b}(t)\frac{[\partial b(x,\ t)/\partial x]}{b^2(x,\ t)},$$

我们有

$$\frac{\bar{b}'(t)}{b(x,\ t)}-\bar{b}(t)\left[\frac{\partial b(x,\ t)/\partial t}{b^2(x,\ t)}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x,\ t)}{b(x,\ t)}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x,\ t)}{\partial x^2}\right]=0,$$

因而

$$\frac{\bar{b}'(t)}{\bar{b}(t)}=b(x,\ t)\left\{\frac{\partial b(x,\ t)/\partial t}{b^2(x,\ t)}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x,\ t)}{b(x,\ t)}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x,\ t)}{\partial x^2}\right\}. \qquad (4.1.9)$$

对(4.1.9)式等号左、右双方求关于 x 的偏导得出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,\ t)\left\{\frac{\partial b(x,\ t)/\partial t}{b^2(x,\ t)}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x,\ t)}{b(x,\ t)}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x,\ t)}{\partial x^2}\right\}\right)=0. \tag{4.1.10}$$

条件(4.1.10)式对于可化也是充分的. 因为如果(4.1.10)式满足, (4.1.9)式右边与 t 无关, 所以 $\bar{b}(t)$ 可由积分得到. 现在, 可从关系式 $\bar{b}(t)/b(x,\ t)=\partial f(x,\ t)/\partial x$ 确定 $f(x,\ t)$. 方程(4.1.9)式等价于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,\ t)}{\partial t}+a(x,\ t)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(x,\ t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]=0,$$

因此, 括弧中的式子与 x 无关, 所以它可取为 $\bar{a}(t)$. 例如, 考虑常系数线性方程

$$dx=ax\,dt+bx\,dw.$$

置 $z=\ln x$ 且运用伊藤公式, 得到

$$dz=\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)dt+b\,dw,$$

因此

$$z=z_0+\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)t+bw$$

或

$$x(t)=x_0\exp\left[\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)t+bw(t)\right]. \tag{4.1.11}$$

习题 4.1.3

当 $a(x,\ t)=a(x)$ 且 $b(x,\ t)=b(x)$ 时, 求出可化条件 (4.1.10) 式. 证明在这种情况下

$$\bar{b}(t)=e^{Ct}f(x,\ t)=e^{Ct}\int_0^x\frac{dy}{b(y)}$$

和

$$\bar{a}(t)=e^{Ct}\left[c\int_0^x\frac{dy}{b(y)}+\frac{a(x)}{b(x)}-\frac{1}{2}b'(x)\right].$$

习题 4.1.4

令 $a(x, t)=a(t)x$ 和 $b(x, t)=b(t)x$，化(4.1.1)式为(4.1.4)式，且求解的转移概率密度。

习题 4.1.5

考虑线性方程

$$dx=[\alpha(t)+\beta(t)x]dt+[\gamma(t)+\delta(t)x]dw.$$

令 $x_0(t)$ 为齐次方程的解(取 $\alpha(t)=\gamma(t)=0$，见习题 4.1.4)。置 $x(t)=x_0(t)\zeta(t)$，求解非齐次方程。

习题 4.1.6

找可以化为线性方程的方程类。假设系数 a 和 b 与 t 无关。证明可化条件是

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c'(x)}\frac{d}{dx}b(x)c'(x)\right]=0,$$

其中 $c(x)=a(x)/b(x)-\frac{1}{2}b'(x)$。如果可化条件满足，指出如何实现简化[30]。

在讨论理论之前，应该注意到系数 $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$ 必须对 $-\infty<x<\infty$ 都有定义，因为如果 $x(t)$ 是解，那么一般说来，对任意正数 M 和任意正数 t，$|x(t)|>M$ 有正概率。如果系数 $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$ 只在有限区间上有定义，那么可以扩充到整个实轴上使方程有意义。在习题 4.2.3* 中已指出，如果 a 和 b 定义在有限区间 $[\alpha, \beta]$ 上，那么只要解未离出区间 $[\alpha, \beta]$，它不依赖于系数的扩充。但在 $x(t)$ 首次离开区间 $[\alpha, \beta]$ 后，它就与系数的扩充有关。

前面的初等理论有些重要的应用。第二章讨论的朗之万方

程是最简单的线性方程

$$dv(t)=-\beta v(t)dt+q\,dw(t), \qquad (4.1.12)$$

其中 $q=\sqrt{2kT\beta/m}$．它的解 $v(t)$ 称为奥伦斯坦-乌伦贝克(Ornstein-Uhlenbeck)[77]过程，它是布朗质点速度的模型．过程 $v(t)=v(t,\beta)$ 作为随机力的近似比白噪声过程在物理上更易接受．白噪声过程是 $w(t)$ 的“导数”，作为一个函数它并不存在(仅作为一个广义函数)．白噪声在时间 t 和 s 上的相关为

$$E\dot{w}(t)\dot{w}(s)=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}Ew(t)w(s)=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}(t\wedge s)=\delta(t-s).$$

这样，δ-相关的白噪声仅仅是数学理想模型，因为物理现象认为是连续变化的．由于

$$x(t)=x_0+\int_0^t v(s)ds$$

是质点的位移，$x(t)$ 是物理布朗运动，因而，$v(t)$ 是物理噪声．

量纲为 $[T^{-1}]$(时间的倒数，即频率)的常数 β 是描述碰撞频率的参数．在碰撞之间，质点的运动是完全相关的，而且可视为是直线运动．因而，β 是布朗质点在不同时间上的速度间的物理相关性的度量．为了计算速度的相关，置 $t=\beta s$，将时间尺度改变得更粗糙些(即 s 中小的变化产生 t 中大的变化)．考虑到 $w(\beta s)/\sqrt{\beta}$ 是布朗运动，从(4.1.12)式中得到

$$dv^\beta(s)=-\beta^2 v^\beta(s)ds+\beta p\,dw_1(s),$$

其中 $v^\beta(s)=v(\beta s)$，$p=\sqrt{2kT/m}$，且 $w_1(s)=w(\beta s)/\sqrt{\beta}$．

它的解为

$$v^\beta(s)=v_0^\beta e^{-\beta^2 s}+p\beta\int_0^s e^{-\beta^2(s-u)}dw_1(u).$$

因为 $dx^\beta(s)/ds=\beta v^\beta(v)$，所以过程 $x^\beta(s)=x(\beta s)$ 的物理速度 $\hat{v}^\beta(s)$ 是 βv^β．因而

$$\hat{v}^{\beta}(s)=\frac{1}{\beta}\hat{v}_0^{\beta}e^{-\beta^2 s}+p\int_0^s \beta^2 e^{-\beta^2(s-u)}dw_1(u), \quad (4.1.13)$$

$$E\hat{v}^{\beta}(s)=\frac{1}{\beta}\hat{v}_0 e^{-\beta^2 s}\to 0, \quad 当\ \beta\to\infty.$$

由(3.2.2)式，相关为

$$E\{[\hat{v}^{\beta}(s_1)-E\hat{v}^{\beta}(s_1)][\hat{v}^{\beta}(s_2)-E\hat{v}^{\beta}(s_2)]\}$$

$$=p^2\beta^4 E\int_0^{s_1}e^{-\beta^2(s_1-u)}dw_1(u)\int_0^{s_2}e^{-\beta^2(s_2-u)}dw_1(u)$$

$$=p^2\beta^4\int_0^{s_1\wedge s_2}e^{-\beta^2(s_1-u)-\beta^2(s_2-u)}du.$$

假设 $s_2<s_1$，我们得到

$$\mathrm{Cov}(\hat{v}^{\beta}(s_1),\ \hat{v}^{\beta}(s_2))=\frac{kT}{m}\beta^2 e^{-\beta^2(s_1-s_2)}.$$

于是当 $\beta\to\infty$ 时

$$\mathrm{Cov}(\hat{v}^{\beta}(s_1),\ \hat{v}^{\beta}(s_2))\to\frac{kT}{m}\delta(s_1-s_2).$$

事实上，如果 $\varphi(s)$ 是检验函数，那么

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi_1(t),$$

其中 $\varphi_1(t)$ 是有界的．因而

$$\beta^2\int_0^{\infty}\varphi(t)e^{-\beta^2 t}dt=\beta^2\varphi(0)\int_0^{\infty}e^{-\beta^2 t}dt+\beta^2\int_0^{\infty}t\varphi_1(t)e^{-\beta^2 t}dt.$$

现在当 $\beta\to\infty$ 时，

$$\left|\beta^2\int_0^{\infty}t\varphi_1(t)e^{-\beta^2 t}dt\right|\leqslant\beta^2 C\int_0^{\infty}te^{-\beta^2 t}dt=\frac{C}{\beta^2}\to 0.$$

这里 C 是一个常数使得 $|\varphi_1(t)|\leqslant C$．由此得到当 $\beta\to\infty$ 时，

$$\int_0^{\infty}\beta^2 e^{-\beta^2 t}\varphi(t)dt\to\varphi(0),$$

因此当 $\beta\to\infty$ 时，$\beta^2 e^{-\beta^2 t}\to\delta(t)$．从(4.1.13)式得出

$$\int_0^t v(s,\ \beta)ds\to\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,w_1(t).$$

因而奥伦斯坦-乌伦贝克过程 $v(t,\beta)$ 是指数相关的，这样在物理上它是一个比白噪声更易接受的速度过程模型．有时奥伦斯坦-乌伦贝克过程又称为**有色噪声**．

让我们考察一个简单的例子，即用有色噪声 v 来代替白噪声：

$$\dot{x}=ax+bxv, \tag{4.1.14}$$

其中
$$dv=-kvdt+kdw.$$

那么，当 $k\to\infty$ 时 v 成为白噪声．因为 v 是连续函数，所以方程(4.1.14)是线性常微分方程．其解为

$$x(t)=x_0\exp\left[at+b\int_0^t v(s)ds\right].$$

令 $k\to\infty$，得到

$$x(t)\to x_0e^{at+bw(t)}. \tag{4.1.15}$$

另一方面，"极限"方程

$$dx=ax\,dt+bx\,dw \tag{4.1.16}$$

的解为(4.1.11)式：

$$x(t)=x_0\exp\left[\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)t+bw(t)\right],$$

它与 (4.1.15) 式不同．由此可见，伊藤方程(4.1.16)不是由有色噪声所产生的方程(4.1.14)的极限．我们将指出，为了得到"正确的"物理结果(4.1.15)式，必须按照斯特拉脱诺维奇意义解释 (4.1.16) 式[95]．因为斯特拉脱诺维奇积分满足所有经典的积分规则，所以线性方程(4.1.16)式可用经典方法求解．将(4.1.16)式写为

$$d_s\left[xe^{-at+bw(t)}\right]=0,$$

我们得到"正确"的结果

$$x(t)=x_0e^{at+bw(t)}.$$

由此得到结论：斯特拉脱诺维奇方程比伊藤方程更能作为一个

物理现象的理想模型. 令

$$d_s x(t)=a(x(t),\ t)dt+b(x(t),\ t)d_s w(t) \quad (4.1.17)$$

是斯特拉脱诺维奇方程. 下一步导出等价的伊藤方程[95]. 如果 $x(t)$ 是(4.1.17)式的解,由(3.4.10)式有

$$(S)\int_{t_0}^{t} b(x(s),\ s)dw(s)=\int_{t_0}^{t} b(x(s),\ s)dw(s)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} b(x(s),\ s)b_x(x(s),\ s)ds. \quad (4.1.18)$$

因此,由(4.1.17)式,

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} a(x(s),\ s)ds+(S)\int_{t_0}^{t} b(x(s),\ s)dw(s)$$

$$=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[a(x(s),\ s)+\frac{1}{2}b(x(s),\ s)b_x(x(s),\ s)\right]ds$$

$$+\int_{t_0}^{t} b(x(s),\ s)dw(s). \quad (4.1.19)$$

方程(4.1.19)可以写为微分形式

$$dx(t)=\left[a(x(t),\ t)+\frac{1}{2}b(x,\ t)b_x(x(t),\ t)\right]dt$$

$$+b(x(t),\ t)dw(t). \quad (4.1.20)$$

方程 (4.1.20) 是 (4.1.17) 式的伊藤等价式. 注意如果 $b(x,\ t)$ 与 x 无关, 那么(4.1.17)式与 (4.1.20) 式相等, 不需要修正. 项 $\frac{1}{2}b(x,\ t)b_x(x,\ t)$称为王-萨凯(Wong-Zakai)修正.

习题 4.1.7

令 $\mathbf{x}(t)$ 是伊藤方程组

$$d\mathbf{x}(t)=\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\ t)dt+\mathbf{b}(\mathbf{x}(t),\ t)d\mathbf{w}(t)$$

的解. 证明对于任意连续函数 $f(t)$, 当 $\max(t_{n+1}-t_n)\to 0$ 时有

$$\sum_{n=0}^{m} f(t_n)[x_i(t_{n+1})-x_i(t_n)][x_j(t_{n+1})-x_j(t_n)]$$

$$\to \int_\alpha^\beta f(t)\sum_k b_{ik}(x(t),\ t)b_{jk}(x(t),\ t)dt,$$

其中 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{m+1}=\beta$.

习题 4.1.8

对于斯特拉脱诺维奇方程组

$$d_S\mathbf{x}(t)=\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\ t)dt+\mathbf{b}(\mathbf{x}(t),\ t)d_S\mathbf{w}(t),$$

导出多维的王-萨凯修正.

(答案

$$dx_i(t)=\left[a_i(\mathbf{x}(t),\ t)+\frac{1}{2}\sum_{k,j}b_{kj}(\mathbf{x}(t),\ t)\frac{\partial b_{ij}(\mathbf{x}(t),\ t)}{\partial x_k}\right]dt$$
$$+\sum_j b_{ij}(\mathbf{x}(t),\ t)dw_j(t) \qquad (4.1.21)$$

$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$[38],[85].)

习题 4.1.9

写出斯特拉脱诺维奇线性方程组 $d_S\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}dt+\mathbf{x}^T\mathbf{B}d_S\mathbf{w}$ 的等价的伊藤形式,其中 $\mathbf{B}$ 是向量.

4.2* 解的存在性和唯一性

在下列简化条件下:

(i) a 和 b 是 x 的函数且 $a,\ b\in C^1(R)$.

(ii) $\max(|da/dx|+|db/dx|)=K<\infty$.

我们将证明解的存在性和唯一性. 用逐次逼近法构造解.

把伊藤方程写成积分形式

$$x(t)=x_0+\int_0^t a(x(s))ds+\int_0^t b(x(s))dw(s), \qquad (4.2.1^*)$$

置
$$x_0(t)=x_0$$
和
$$x_n(t)=x_0+\int_0^t a(x_{n-1}(s))ds$$
$$+\int_0^t b(x_{n-1}(s))dw(s).$$

显然，$x_n(t)$ 是非可料连续过程. 利用不等式
$$(A+B)^2\leqslant 2(A^2+B^2),$$
得到
$$E[x_{n+1}(t)-x_n(t)]^2$$
$$\leqslant 2E\left\{\left[\int_0^t (a(x_n(s))-a(x_{n-1}(s)))ds\right]^2\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^t (b(x_n(s))-b(x_{n-1}(s)))dw(s)\right]^2\right\}$$
$$\leqslant 2tE\left\{\int_0^t [a(x_n(s))-a(x_{n-1}(s))]^2ds\right.$$
$$\left.+\int_0^t [b(x_n(s))-b(x_{n-1}(s))]^2ds\right\}.$$
我们已经用了柯西-许瓦尔兹 (Cauchy-Schwarz) 不等式和 (3.2.2)式. 利用中值定理得到
$$E[x_{n+1}(t)-x_n(t)]^2\leqslant 4K^2t\int_0^t E[x_n(s)-x_{n-1}(s)]^2ds.$$
因而，对于 $t\leqslant T$，
$$E[x_{n+1}(t)-x_n(t)]^2\leqslant\frac{M(4K^2Tt)^{n+1}}{(n+1)!},$$
其中 $M=TE[a^2(x_0)+b^2(x_0)]$. 现在，因为
$$y_n(t)=\int_0^t [b(x_n(s))-b(x_{n-1}(s))]dw(s)$$
是鞅，函数 $y_n^2(t)$ 是下鞅，由柯尔莫哥洛夫不等式得出

$$P[\max_{t\leqslant T}|y_n(t)|\geqslant v]\leqslant E\left[\frac{y_n(T)}{v}\right]^2$$

$$=\frac{E\int_0^T[b(x_n(t))-b(x_{n-1}(t))]^2dt}{v^2}$$

$$\leqslant\left(\frac{K}{v}\right)^2\int_0^T E[x_n(t)-x_{n-1}(t)]^2dt$$

$$\leqslant\frac{M(4K^2T^2)^nK^2}{n!v^2}=\frac{C_1C_2^n}{v^2n!}.$$

类似地有

$$P\left[\max_{t\leqslant T}\left|\int_0^t[a(x_n(s))-a(x_{n-1}(s))]ds\right|\geqslant v\right]\leqslant\frac{C_1C_2^n}{v^2n!}.$$

如果 T 充分小，$C_2\leqslant1$，取 $v=1/\sqrt{(n-2)!}$，得到

$$P\left[\max_{t\leqslant T}|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\geqslant\frac{1}{\sqrt{(n-2)!}}\right]\leqslant\frac{C_1}{(n-1)n}.$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}1/[n(n-1)]<\infty$，由波莱尔-康特立引理有

$$P\left[\max_{t\leqslant T}|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\geqslant\frac{1}{\sqrt{(n-2)!}}\text{ i. o.}\right]=0.$$

由此得出 $x_n(t)$ 是几乎处处一致收敛于(4.2.1*)式的一个解.

为了证明解的唯一性，令 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是(4.2.1*)式的两个解且置

$$\tau=\min(t\,|\,|x_1(t)|\text{ 或 }|x_2(t)|\text{ 等于 }n).$$

那么对所有 $t\leqslant\tau$ 有

$$[x_2(t)-x_1(t)]\chi_{[0,\tau]}(t)$$
$$=\int_0^t[a(x_2(s)\chi_{[0,\tau]}(s))-a(x_1(s)\chi_{[0,\tau]}(s))]ds$$
$$+\int_0^t[b(x_2(s)\chi_{[0,\tau]}(s))-b(x_1(s)\chi_{[0,\tau]}(s))]dw(s).$$

因为 $E[x_2(t)\chi_{[0,\tau]}(t)-x_1(t)\chi_{[0,\tau]}(t)]^2\leqslant 4n^2<\infty$,
我们有

$$E|[x_2(t)-x_1(t)]\chi_{[0,\tau]}(t)|$$
$$\leqslant K\int_0^t E|[x_2(s)-x_1(s)]\chi_{[0,\tau]}(s)|ds.$$

由格隆沃尔(Gronwall)不等式得出，对所有 $t\leqslant\tau$ 有

$$\chi_{[0,\tau]}(t)[x_2(t)-x_1(t)]\xrightarrow{\text{a.s.}}0,$$

令 $n\to\infty$, 得到 $\quad x_1(t)\xlongequal{\text{a.s.}}x_2(t)$.

在文献[65]和[30]中给出有关解的存在性和唯一性的进一步结果.

习题 4.2.1*

运用伊藤公式证明：如果 $Ex_0^{2m}<\infty$, 那么(4.2.1*)式的解满足

$$E[x(t)]^{2m}\leqslant E(1+x_0^{2m})e^{Ct},$$

其中 C 是常数.

习题 4.2.2*

证明 $\quad E[x(t)-x_0]^{2m}\leqslant DE(1+x_0^{2m})e^{Ct}t^m,$

其中 D 是常数.

习题 4.2.3*

证明下列**局部化原理**. 对 $c\leqslant x\leqslant d$ 和 $t\geqslant 0$, 令 $a_1(x,t)=a_2(x,t)$ 和 $b_1(x,t)=b_2(x,t)$. 对于随机微分方程

$$dx_i(t)=a_i(x,t)dt+b_i(x,t)dw(t),\ (i=1,2)$$
$$x(0)=x_0\in[c,d],$$

假设 $a_i(x,t)$ 和 $b_i(x,t)$ $(i=1,2)$ 满足 R 中存在性和唯一性定理的条件. 令 $\tau_i=\inf\{t|x_i(t)\notin(c,d)\}$ $(i=1,2)$. 那么 $\tau_1\xlongequal{\text{a.s.}}\tau_2$ 且对所有 $t\leqslant\tau_1$, $x_1(t)\xlongequal{\text{a.s.}}x_2(t)$[60].

4.3 随机微分方程和扩散过程

(a) 马尔可夫过程

对$[0, T]$上随机过程$\zeta(t)$，如果对任意序列$0\leqslant t_0<\cdots<t_n\leqslant T$和$x_0, x_1, \cdots, x_n$，其中$n=1, 2, 3, \cdots$，满足等式

$$P(\zeta(t_n)<x_n|\zeta(t_{n-1})=x_{n-1}, \zeta(t_{n-2})=x_{n-2}, \cdots, \zeta(t_0)=x_0)$$
$$=P(\zeta(t_n)<x_n|\zeta(t_{n-1})=x_{n-1}), \tag{4.3.1}$$

就称$\zeta(t)$为马尔可夫过程．假定t_{n-1}看作为当前时刻，等式(4.3.1)意味着过程"忘记"过去．

习题 4.3.1*

证明(4.3.1)式等价于下列命题．令$\mathscr{F}_t$是对于$s\leqslant t$使$\zeta(s)$可测的最小σ-代数．对于$0\leqslant t\leqslant s\leqslant T$，令

$$F(t, x, s, A)=P(\zeta(s)\in A|\zeta(t)=x)$$

(A是波莱尔集)．如果对任意$0<t<s<T$和A有

$$P(\zeta(s)\in A|\mathscr{F}_t)=F(t, \zeta(t), s, A)=P(\zeta(s)\in A|\zeta(t)),$$

则过程$\zeta(t)$是马尔可夫过程．

假设马尔可夫过程$\zeta(t)$的转移概率分布

$$F(t, x, s, y)=P(\zeta(s)<y|\zeta(t)=x) \quad (s>t)$$

具有关于y的密度$p(t, x, s, y)$，即

$$F(t, x, s, y)=\int_{-\infty}^{y}p(t, x, s, z)dz.$$

那么由马尔可夫性质(4.3.1)，就有

$$p(t, x, s, y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t, x, \tau, z)p(\tau, z, s, y)dz \quad (t<\tau<s), \tag{4.3.2}$$

即在时间区间$[t, s]$中，$\zeta(\cdot)$ 从 x 到达 y 的概率是 $\zeta(\cdot)$ 在任意时刻 τ 到达任意点 z，然后与到达 z 的方式独立地再跑到 y 的概率．方程(4.3.2)式称为马尔可夫过程的切普曼-柯尔莫哥洛夫 (Chapman-Kolmogorov) 方程． 必须注意到也有满足(4.3.2)式的非马尔可夫过程[28]．

如果 $\zeta(t)$ 值的变化仅在时间 $t_1, t_2, \cdots$ (即在时间 1, 2, …) 出现，那么 $\{\zeta_n\}$ 是马尔可夫链，所取的值 ζ_n 称为状态．令 $E_1^{(n)}$, $E_2^{(n)}, \cdots$ 是在第 n 时刻(或代)的可能状态，那么由元素

$$P_{ij}^{(n)}=P(\zeta^n=E_j^{(n)} \mid \zeta^{n-1}=E_i^{(n-1)})$$

构成的矩阵称为转移概率矩阵．

(b) 扩散过程

一个马尔可夫过程 $\zeta(t)$，如果它的转移概率满足下列两条件：

(i) 对每一 $s>0$, t 和 x

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|x-y|>s} p(t, x, t+h, y)dy=0.$$

(ii) 存在函数 $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$ 使得对所有 $s>0$, t 和 x:

(a) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|x-y|<s}(y-x)p(t, x, t+h, y)dy=a(x, t).$$

(b) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|x-y|<s}(y-x)^2p(t, x, t+h, y)dy=b(x, t).$$

称 $\zeta(t)$ 为扩散过程． 函数 $a(x, t)$ 称为 $\zeta(t)$ 的 (无限小) 偏移系数，$b(x, t)$ 称为 (无限小) 扩散系数． 条件 (i) 和 (ii) 以及 $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$ 的直观意义如下． 在很短的时间区间 (其长为 h) 内，在时刻 t，函数 $\zeta(\cdot)$ 在点 x 所做的位移 h 为 $a(x, t)h+\delta x+o(h)$，其中 $a(x, t)$ 是质点 [它的运动由 $\zeta(\cdot)$ 描述] 在介质中偏移的速度，δx 是质点的随机波动，这种随机波动是由于随机碰撞和热的起伏及其他因素所引起的． $E\delta x=0$, $\mathrm{Var}\,\delta x=$

$b(x, t)h$，即 $b(x, t)$ 正比于质点邻域中液体分子的平均能量。下列条件蕴涵着(i)和(ii)：

当 $h\to 0$ 时，有

(i*) $\frac{1}{h}E_{x,t}|\zeta(t+h)-\zeta(t)|^{2+\varepsilon}\to 0$,

(ii*) (a) $\frac{1}{h}E_{x,t}[\zeta(t+h)-\zeta(t)]\to a(x, t)$

(b) $\frac{1}{h}E_{x,t}[\zeta(t+h)-\zeta(t)]^2\to b(x, t)$,

其中 ε 是某个正数。

习题 4.3.2*

证明上述断言。

习题 4.3.3

证明如果 $g(x, t)$ 是光滑函数并关于 x 单调且 $\zeta(t)$ 是扩散过程，则过程 $\eta(t)=g(\zeta(t), t)$ 也是扩散过程．并证明

$$\bar{a}(x, t)=\frac{\partial g}{\partial t}(g^{-1}(x, t), t)+a(g^{-1}(x, t), t)\frac{\partial g}{\partial x}(g^{-1}(x, t), t)$$
$$+\frac{1}{2}b(g^{-1}(x, t), t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(g^{-1}(x, t), t)$$

(首先微分！)且

$$\bar{b}(x, t)=g(g^{-1}(x, t), t)\left[\frac{\partial}{\partial x}g(g^{-1}(x, t), t)\right]$$

分别是 $\eta(t)$ 的偏移系数和扩散系数．其中 a 和 b 是 $\zeta(t)$ 的偏移系数和扩散系数．取

$$g(x, t)=\int_0^x\frac{du}{\sqrt{b(u, t)}}.$$

(c) 扩散过程和随机微分方程

令 $\eta(t)$ 是随机微分方程 $d\eta=a\,dt+\sigma\,dw$ 的解，假设 a 和 σ

满足存在定理的条件. 那么 $\eta(t)$ 是扩散过程, 且

$$F(t,\ x,\ s,\ y)=P(\eta(s)\leqslant y\,|\,\eta(t)=x).$$

事实上, 条件 (i*) 和 (ii*) 是习题 4.2.2* 的结果:

$$E_{x,t}[\eta(t+h)-\eta(t)]^4=E_{x,t}[\eta(t+h)-x]^4$$
$$\leqslant K_1h^2(1+x^4).$$

因而得到 (i*). 当 $h\to 0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}E_{x,t}(\eta(t+h)-x)&=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}E_{x,t}a(\eta(u),\ u)du\\&=\int_0^1 E_{x,t}a(\eta(t+sh),\ t+sh)ds\\&\to\int_0^1 E_{x,t}a(\eta(t),\ t)ds=a(x,\ t).\end{aligned}$$

因而 (ii*)(a) 满足.

下一步, 取 $f(y)=y^2$, 运用伊藤公式, 得到

$$\begin{aligned}E_{x,t}(\eta(t+h)-x)^2&=E_{x,t}[\eta(t+h)]^2-x^2\\&\quad-2xE_{x,t}[\eta(t+h)-x]\\&=E_{x,t}\left\{\int_t^{t+h}[2\eta(u)a(\eta(u),\ u)\right.\\&\quad+\sigma^2(\eta(u),\ u)]du\\&\quad\left.+\int_t^{t+h}2\eta(u)\sigma(\eta(u),\ u)dw(u)\right\}\\&\quad-2xa(x,\ t)h+o(h).\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E_{x,t}[\eta(t+h)-x]^2\\&=\lim_{h\to 0}\int_0^1 2E_{x,t}[\eta(t+sh)a(\eta(t+sh),\ t+sh)\\&\quad+\sigma^2(\eta(t+sh),\ t+sh)]ds-2xa(x,\ t)=\sigma^2(x,\ t),\end{aligned}$$

所以 (ii*)(b) 成立.

共逆亦真，即如果 $\zeta(t)$ 是具有光滑的偏移系数 a 和扩散系数 b，$b\geqslant\delta>0$ 的几乎处处连续的扩散过程，且它的转移概率函数满足某些连续条件，则 $\zeta(t)$ 是随机微分方程

$$d\zeta=a\,dt+\sqrt{b}\,dw$$

的解，此处 $w(t)$ 为布朗运动[80]。

第五章　随机微分方程和偏微分方程

5.1　柯尔莫哥洛夫，费恩曼和卡西公式

令 $\eta(t)$ 是随机微分方程 $d\eta=a\,dt+\sigma\,dw$ 的解并设

$$u(x,\ t)=E_{x,t}f(\eta(s))\quad (0<t<s).$$

若 a 与 σ 是光滑的并且满足存在性定理的条件，则有

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}+a(x,\ t)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(x,\ t)\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}=0,$$

且对任意检验函数 $f(x)$ 有

$$\lim_{t\uparrow s}u(x,\ t)=f(x).$$

事实上，运用伊藤公式，由于随机积分的数学期望为零，所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E_{x,t-h}[f(\eta(t))-f(x)]\\
&=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E_{x,t-h}\left\{\int_{t-h}^{t}\left[a(\eta(s),\ s)f'(\eta(s))\right.\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\sigma^2(\eta(s),\ s)f''(\eta(s))\right]ds\\
&\quad\left.+\int_{t-h}^{t}\sigma(\eta(s),\ s)f'(\eta(s))dw(s)\right\}\\
&=a(x,\ t)f'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x,\ t)f''(x).
\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

现有

$$u(x,\ t-h)=E_{x,t-h}f(\eta(s))=E_{x,t-h}E_{\eta(t),t}f(\eta(s))$$
$$=E_{x,t-h}u(\eta(t),\ t). \tag{5.1.2}$$

运用(5.1.1)式我们得出

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E_{x,t-h}[u(\eta(t),\ t)-u(x,\ t)]$$
$$=a(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(x,\ t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

且由(5.1.2)式得出

$$0=\frac{u(x,\ t)-u(x,\ t-h)}{h}+E_{x,t-h}\frac{u(\eta(t),\ t)-u(x,\ t)}{h}.$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{5.1.3}$$

方程(5.1.3)称为柯尔莫哥洛夫方程，其中满足条件：当 $t\uparrow s$ 时

$$u(x,\ t)\to f(x) \tag{5.1.4}$$

的解 $u(x,\ t)$ 可表示为：

$$u(x,\ t)=E_{x,t}f(\eta(s)).$$

此表达式称为柯尔莫哥洛夫公式。

习题 5.1.1

证明(5.1.4)式。

用 L 表示算子：

$$a\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

若 a 和 σ 与时间无关，则柯尔莫哥洛夫公式表明 L 生成 $C(R)$ 上的一个半群 G：

$$G(t)f(x)=E_xf(\eta(t)).$$

习题 5.1.2

设

$$v(x,\ t)=E_{x,t}f(\eta(T))\exp\int_t^T g(\eta(s),\ s)ds. \qquad (5.1.5)$$

运用类似的论证，证明

$$\frac{\partial v}{\partial t}+Lv+gv=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T \qquad (5.1.6)$$

且当 $t\uparrow T$ 时

$$v(x,\ t)\to f(x)^{[30]}. \qquad (5.1.7)$$

公式(5.1.5)是(5.1.6)式与(5.1.7)式的解，称作费恩曼-卡西(Feynman-Kac)公式.

习题 5.1.3

导出方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+Lv+f=0,\ t<T,\ -\infty<x<\infty,$$

$$v(x,\ T)=0$$

的解的表达式

$$v(x,\ t)=E_{x,t}\int_t^T f(\eta(s),\ s)ds.$$

我们把费恩曼-卡西公式作为描述一"毁灭"的过程解释如下. 令 $x(t)$ 是一个具有毁灭的布朗运动，即布朗质点在一随机时刻 T(=毁灭时间)上消失(例如，一个中子在移动中可以被介质吸收). 在时间区间 $(t,\ t+dt)$ 中被毁灭的概率等于 $k(x(t))dt+o(dt)$. 若质点沿路径 $x(t)$ 移动，则质点生存到时刻 T 的概率等于

$$(1-k(x(t_1))dt)(1-k(x(t_2))dt)\cdots(1-k(x(t_n))dt)+o(1),$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$, $dt=t_{j+1}-t_j$. 当 $dt\to 0$, 生存的概率等于 $\exp\left[-\int_0^T k(x(t))dt\right]$. 所以

$$u(x, t)=E_x(f(x(t)), T>t)$$
$$\equiv E_x[f(x(t))P_x(T>t|x(\cdot))]$$
$$=E_x f(x(t))\exp\left[-\int_0^t k(x(s))ds\right].$$

习题 5.1.4

导出方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+L\psi+h\frac{\partial\psi}{\partial x}+\left(g+\frac{1}{2}h^2\right)\psi=0 \quad (t<T)$$

当 $t\uparrow T$ 时
$$\psi(x, t)\to f(x)$$
的解的表达式

$$\psi(x, t)=E_{x,t}\left\{\exp\left[\int_t^T g(\eta(s), s)ds\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^T h(\eta(s), s)dw(s)\right]f(\eta(t))\right\}$$[30].

5.2 福克尔-普朗克与柯尔莫哥洛夫前向和后向方程

在经典力学中，一质点系在相空间中的密度 D 的表达式由刘维尔方程(10.1.3)决定. 如果在质点中引入随机碰撞，则密度，即相空间中的转移概率密度 p 由广义刘维尔方程决定，它是由福克尔和普朗克(Fokker & Planck)首先推导出来的.

令 $\zeta(t)$ 是一个扩散过程，它的转移概率密度是 $p(t, x, s, y)$，而且它的偏移系数与扩散系数分别是 $a(x, t)$ 与 $b(x, t)$. 我们证明 p 满足偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial s}p(t, x, s, y)+\frac{\partial}{\partial y}[a(y, s)p(t, x, s, y)]$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(y, s)p(t, x, s, y)]=0 \qquad (5.2.1)$$

当 $s\downarrow t$ 时 $\qquad p(t,\ x,\ s,\ y)\to\delta(x-y)$.

方程(5.2.1)称为福克尔-普朗克方程或者前向柯尔莫哥洛夫方程(就"前向"变量 s 与 y 而论). 对任意有界光滑函数 $g(y)$, 根据第 4.3 节的性质(i*)与(ii*), 我们有: 当 $h\downarrow 0$ 时

$$\frac{1}{h}\int[g(y)-g(x)]p(t,\ x,\ t+h,\ y)dy$$
$$=\frac{1}{h}\int\Big[g'(x)(y-x)+\frac{1}{2}g''(x)(y-x)^2+(y-x)^3R\Big]$$
$$\cdot p(t,\ x,\ t+h,\ y)dy\to a(x,t)g'(x)+\frac{1}{2}b(x,\ t)g''(x). \tag{5.2.2}$$

其中 R 是 $g(y)$ 关于 x 的泰勒展开式的余项. 因此, 运用切普曼-柯尔莫哥洛夫方程, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t,\ x,\ s+h,\ z)g(z)dz$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}p(t,\ x,\ s,\ y)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}p(s,\ y,\ s+h,\ z)g(z)dz\Big]dy. \tag{5.2.3}$$

由此得出 $\quad\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[p(t,\ x,\ s+h,\ z)-p(t,\ x,\ s,\ z)]g(z)dz$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}p(t,\ x,\ s,\ y)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\ y,\ s+h,\ z)$$
$$\times(g(z)-g(y))dz\Big]dy.$$

除以 h 并且令 $h\to 0$ 时取极限, 从(5.2.2)式我们得出

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int[p(t,\ x,\ s+h,\ z)-p(t,\ x,\ s,\ z)]g(z)dz$$
$$=\int g(z)\frac{\partial p}{\partial s}(t,\ x,\ s,\ z)dz$$
$$=\int p(t,\ x,\ s,\ y)\Big[a(y,\ s)g'(y)+\frac{1}{2}b(y,\ s)g''(y)\Big]dy.$$

因此函数 $p(\cdot, \cdot, s, y)$ 是抛物型方程 (5.2.1) (在弱意义下)的解.

习题 5.2.1

对 $g=g(y, t)$ 导出类似于(5.2.2)式的公式,即求下列的极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E_{x,t}[g(\zeta(t+h), t+h)-g(\zeta(t), t)].$$

习题 5.2.2

导出后向柯尔莫哥洛夫方程

$$\frac{\partial p(t, x, \cdot, \cdot)}{\partial t}+a(x, t)\frac{\partial p(t, x, \cdot, \cdot)}{\partial x}+\frac{1}{2}b(x, t)\frac{\partial^2 p(t, x, \cdot, \cdot)}{\partial x^2}=0. \qquad (5.2.4)$$

若 a 和 b 与 t 无关,称方程

$$d\zeta(t)=a(\zeta(t))dt+\sigma(\zeta(t))dw(t) \quad (\sigma^2=b)$$

是时齐的. 这个方程对 t 的平移是不变的,所以

$$p(t, x, s, y)=p(0, x, s-t, y). \qquad (5.2.5)$$

现因 $\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial s}$, 故我们可把后向柯尔莫哥洛夫方程(5.2.4)写成下列形式:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=Lp;$$

而把福克尔-普朗克方程(5.2.1)写成

$$\frac{\partial p}{\partial t}=L^*p,$$

其中 L^* 是 L 的伴随算子.

我们可用后向柯尔莫哥洛夫方程导出关于随机微分方程

$$dx(t)=a(x(t))dt+b(x(t))dw(t)$$

$$x(0)=x$$

解的矩的偏微分方程. 由于

$$u(x,\ t)=E_x\varphi(x(t))=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)p(x,\ t,\ y)dy \quad (5.2.6)$$

按(5.2.4)式,有

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u(x,\ 0)=\varphi(x).\end{gathered} \quad (5.2.7)$$

取 $\varphi(x)=x^n$, 我们看到 $u(x,\ t)$ 是条件矩(5.2.6)式.

5.3 随机微分方程组和边界条件

(a) 方程组的伊藤公式

令 $$\mathbf{w}(t)=\begin{bmatrix}w_1(t)\\ \vdots\\ w_n(t)\end{bmatrix}$$

是独立布朗运动的向量, 令 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},\ t)$ 是一个 $n\times n$ 矩阵, 并令 $\mathbf{b}(\mathbf{x},\ t)$ 是向量:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\ t)=\begin{bmatrix}b_1(x,\ t)\\ \vdots\\ b_n(x,\ t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

随机微分方程组

$$d\mathbf{x}=\mathbf{b}\,dt+\boldsymbol{\sigma}\,d\mathbf{w} \quad (5.3.1)$$

引出如下的伊藤公式:

$$df(\mathbf{x}(t),\ t)=Lf\,dt+\nabla_x f^T\boldsymbol{\sigma}\,d\mathbf{w} \quad (5.3.2)$$

式中

$$Lf=\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{b}\cdot\nabla_x f+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\equiv\frac{\partial f}{\partial t}+Mf \quad (5.3.3)$$

和

$$a_{ij}=(\sigma\sigma^T)_{ij}. \tag{5.3.4}$$

第5.1节中的柯尔莫哥洛夫公式与费恩曼-卡西公式保持不变。柯尔莫哥洛夫后向方程由下式给出：

$$\frac{\partial p}{\partial t}+Mp=0,$$

且福克尔-普朗克(前向)方程为

$$\frac{\partial p}{\partial s}+\nabla_y\cdot(\mathbf{b}p)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2(a_{ij}p)}{\partial y_i\partial y_j}=0.$$

(b) 吸收边界

令 $\mathbf{x}(t)$ 是方程组 (5.3.1) 在 R^n 中一个确定区域 Ω 中的解，它的边界 $\partial\Omega$ 是光滑的. 假设在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上有一个完整的吸收壁使得对一切 $t\geqslant\tau$ 有 $p[\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(\tau)|\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0\in\Omega]=1$, 其中 $\tau=\inf\{s\geqslant0|\mathbf{x}(s)\in\partial\Omega\}$ [即 τ 是 $\mathbf{x}(t)$ 从 Ω 的首次离出时间].

因为从 $\partial\Omega$ 上的一点 $\mathbf{x}$ 到 Ω 中的任一点 $\mathbf{y}$ 的转移概率为0[$\mathbf{x}(t)$ 是吸收的！], 所以对一切 $\mathbf{x}\in\partial\Omega$, $\mathbf{y}\in\Omega$, $p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{y})=0$. 这样 $p(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{y})$ 是后向柯尔莫哥洛夫方程的格林函数并满足边界条件

$$p(t,\ \mathbf{x},\ s,\ \mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad t\leqslant s,\ \mathbf{x}\in\partial\Omega$$

当 $t\uparrow s$ 时 $\quad p(t,\ \mathbf{x},\ s,\ \mathbf{y})\to\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad \mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\Omega$

(见第5.2节).

作为一个例子，考虑具有一个吸收壁的布朗运动. 对于在 $x>0$ 上定义且在 $x=0$ 处具有吸收边界的布朗运动的前向柯尔莫哥洛夫方程或者福克尔-普朗克方程由下式给定：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},\quad \text{对 } y>0,$$

$$p(0,\ t,\ y)=0,\quad t>0,\ y>0.$$

当 $t\downarrow 0$ 时　　$p(x, t, y)\to\delta(x-y)$, $x>0$, $y>0$.

这个初始边值问题的解为

$$p(x, t, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-(x-y)^2/2t}-e^{-(x+y)^2/2t}\right].$$

根据对称性我们可看出 $p(x, t, 0)=0$. 为了验证当 $t\downarrow 0$ 时, $p(x, t, y)\to\delta(x-y)$, 我们令 $\varphi(x)$ 是任意检验函数使得对一切 $x<0$ 有 $\varphi(x)=0$. 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x, t, y)\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/2t}\varphi(x)dx$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+y)^2/2t}\varphi(x)dx.$$

我们已经证明(见第 1.5 节). 当 $t\downarrow 0$ 时,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/2t}\varphi(x)dx\to\varphi(y).$$

由此得出若 $y>0$, 则当 $t\downarrow 0$ 时,有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+y)^2/2t}\varphi(x)dx\to\varphi(-y)=0.$$

所以对一切 $x>0$, $y>0$, 当 $t\downarrow 0$ 时,

$$p(x, t, y)\to\delta(x-y).$$

习题 5.8.1

考虑在 $m=m_1$ 处具有一个完整吸收壁的随机游动(第一章),即

$$P(X_{n+1}=m\,|\,X_n=m_1)=\delta_{m, m_1}.$$

证明在走了 N 步以后到达 $m\leqslant m_1$ 的概率 $W(m, N, m_1)$ 为

$$W(m, N, m_1)=W(m, N)-W(2m_1-m, N),$$

这里 $W(m, N)=P(X_N=m\,|\,X_0=0)$. (运用关于 m_1 的随机游动的对称性),令

$$\frac{m}{\sqrt{n}}\to x,\ \frac{m_1}{\sqrt{n}}\to x_1,\ \frac{2N}{n}\to t\quad(n\to\infty)$$

改变 m, m_1, 与 n 的比例尺度，证明当 $n\to\infty$ 时，有

$$W(m,\ N,\ m_1)\to\frac{1}{\sqrt{\pi t}}(e^{-x^2/4t}-e^{-(2x_1-x)^2/2t})\equiv w(x,\ t,\ x_1).$$

并证明 w 满足福克尔-普朗克方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \text{对}\ x<x_1\ \text{或}\ x>x_1.$$

其边界条件和初始条件分别为

$$w(x_1,\ t,\ x_1)=0\ \text{与}\ w(x,\ 0,\ x_1)=\delta(x).$$

习题　5.3.2

运用具有适当边界条件的后向柯尔莫哥洛夫方程，求在区间 $[0,\ \pi]$ 的边界上具有吸收的布朗运动的期望值．运用 (5.3.7) 式和分离变量法证明

$$E(w(t)\,|\,w(s)=x)=x,\quad t>s,\ x\in(0,\ \pi)$$

$$E(w(t)^2\,|\,w(s)=x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nT_n(t-s)X_n(x)+x^2,$$

并证明 $T_n(t)=e^{-n^2t/2}$ 和 $X_n(x)=\sin nx$．计算 a_n.

习题　5.3.3

试求关于式　　$E(\varphi(w(t))\,|\,w(s)=x)$

的一个类似的结果，这里 $\varphi(x)$ 是 $[0,\ \pi]$ 上的一个光滑函数.

(c) 反射边界

令 $\mathbf{x}(t)$ 是方程组 (5.3.1) 在 Ω 中的解．在 $\mathbf{x}(t)$ 到达 $\partial\Omega$ 以后，我们修改 $\mathbf{x}(t)$ 如下．根据在 $\partial\Omega$ 上反射，我们把 $\mathbf{b}(\mathbf{x},\ t)$ 与 $\sigma(\mathbf{x},\ t)$ 扩展到 $R^n-\Omega$ 上 (在 $\partial\Omega$ 的一个邻域中)．然后令 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 是推广的方程组 (5.3.1) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 反射到 Ω 中的反射过程．应当注意到在 $\partial\Omega$ 上的反射是瞬时的，而且在 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 返回到 Ω 中以后，原来的方程组(5.3.1)仍决定运动．这样反射过程被限制在边界上，所以我们仅在 $\partial\Omega$ 附近扩展 $\mathbf{a}$ 与 σ (这个扩展决

定反射的速度与方向)．后向柯尔莫哥洛夫方程的边界条件如下确定．令 $\mathbf{x}_0\in\partial\Omega$ 且令 N 是 $\mathbf{x}_0$ 的一个邻域．在 $\mathbf{x}_0$ 的邻域中我们令 $\boldsymbol{\zeta}=f(\mathbf{x})$ 作变换，使 $N\cap\partial\Omega$ 映射到平面 $\zeta_n=0$ 内，$\mathbf{x}_0$ 映射到原点，以及 $N\cap\Omega$ 映射到 $\zeta_n>0$ 内．这样根据反射，由 $\mathbf{b}$ 与 σ 的扩展推得：若 $\zeta_n<0$，则

$$\mathbf{b}(\zeta_n, \cdots)=-\mathbf{b}(-\zeta_n, \cdots) \quad 与 \quad \boldsymbol{\sigma}(\zeta_n, \cdots)=\boldsymbol{\sigma}(-\zeta_n, \cdots).$$

由此得出在 $\zeta_n=0$ 附近后向柯尔莫哥洛夫方程(就变量 ζ 而论)的解必须满足 $p(-\zeta_n, \cdots)=p(\zeta_n, \cdots)$。从而在 $\zeta_n=0$ 处

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta_n}=0. \tag{5.3.5}$$

映射回变量 $\mathbf{x}$，我们看到(5.3.5)式取如下形式：

$$\frac{\partial p(t, x, s, y)}{\partial \nu_{\mathbf{x}}}=0, \ \mathbf{x}\in\partial\Omega, \tag{5.3.6}$$

这里 $\nu_{\mathbf{x}}$ 是 $\partial\Omega$ 在点 $\mathbf{x}$ 的外法向．

注：(c) 中的论述既不排除质点在边界上停留片刻然后反射的可能性也不排除斜反射的可能性．详见文献[66]和[1]．

让我们再次考虑关于在 $x>0$ 且在原点反射的布朗运动，其福克尔-普朗克方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \quad y>0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, t, y)\big|_{y=0}=0,$$

当 $t\downarrow 0$ 时， $$p(x, t, y)\to\delta(x-y), \quad x>0, \ y>0.$$

其解为 $$p(x, t, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-(x-y)^2/2t}+e^{-(x+y)^2/2t}\right]$$

并有 $$\frac{\partial p}{\partial x}(x, t, y)\big|_{x=0}=0.$$

习题 5.3.4

再次考虑在 $m_1>0$ 处具有一个反射壁的随机游动，即 $P(X_{n+1}=m_1-1|X_n=m_1)=1$. 运用对称性证明

$$W(m,\ N,\ m_1)=W(m,\ N)+W(2m_1-m,\ N)$$

（记号见习题 5.3.1）. 在取极限情况下，得到

$$w(x,\ t,\ x_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left(e^{-x^2/2t}+e^{-(2x_1-x)^2/2t}\right);$$

从而

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,\ t,\ x_1)\Big|_{x=x_1}=0.$$

总之，转移概率密度 $p(t,\ \mathbf{x},\ s,\ \mathbf{y})$ 是具有边界条件

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_{\mathbf{x}}}=0,\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\ \mathbf{y}\in\Omega(\text{后向})$$

或

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_{\mathbf{y}}}=0,\quad x\in\Omega,\ y\in\partial\Omega\ (\text{前向})$$

与初始条件 $\qquad p(t,\ \mathbf{x},\ t,\ \mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$

的后向（或前向）柯尔莫哥洛夫方程的格林函数。

习题 5.3.5

求在区间 $[0,\pi]$ 的边界上具有反射的布朗运动的期望值 $E(w(t)|w(s)=x)$ 的表达式，$x\in(0,\ \pi)$.

5.4 伊藤公式的应用

(a) 离出（首次通过）时间和邓肯方程

令 $\mathbf{x}(t)$ 为(5.3.1)式在区域 $\Omega\subset R^n$ 中的解并且令

$$\tau_{\mathbf{x},s}=\inf\{t\geqslant s|\mathbf{x}(t)\in\partial\Omega,\ \mathbf{x}(s)=\mathbf{x}\}$$

为 $\mathbf{x}(t)$ 从 Ω 上的首次离出时间．期望离出时间 $E\tau_{\mathbf{x},s}$ 可以如下求得．令 $u(\mathbf{x}, t)$ 是下列问题的解：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Mu=-1, \quad t\geqslant s,\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{5.4.1}$$

$$u(\mathbf{x}, t)=0, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega,$$

其中
$$M=\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\cdot\nabla_{\mathbf{x}}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^{*})_{ij}\frac{\partial^{2}}{\partial x_i\partial x_j}$$
是伊藤公式中定义的算子[见(5.3.2)式与(5.3.3)式]．

如果 $u(\mathbf{x}(t), t)$ 是有界光滑函数，那么按伊藤公式，对一切 $s\leqslant t\leqslant\tau_{\mathbf{x},s}$，有

$$u(\mathbf{x}(t), t)=u(\mathbf{x}, s)+\int_{s}^{t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+Mu\right)dt'$$
$$+\int_{s}^{t}(\nabla u)^{T}\cdot\sigma\, d\mathbf{w}(t'). \tag{5.4.2}$$

取 $t=\tau_{\mathbf{x},s}$ 并对(5.4.2)式取数学期望，得到

$$Eu(\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s}), \tau_{\mathbf{x},s})=u(\mathbf{x}, s)+E\int_{s}^{\tau_{\mathbf{x},s}}(-1)dt'.$$

由于 $\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s})\in\partial\Omega$ 以及在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$，故有

$$0=u(\mathbf{x}, s)-E\tau_{\mathbf{x},s}+s.$$

这样

$$E\tau_{\mathbf{x},s}=s+u(\mathbf{x}, s). \tag{5.4.3}$$

如果 $\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 及 $\sigma=\sigma(\mathbf{x})$，那么(5.3.1)式是时齐的，而且 $u=u(\mathbf{x})$．于是在这种情形下

$$E\tau_{\mathbf{x}}=u(\mathbf{x}), \tag{5.4.4}$$

这里 $u(\mathbf{x})$ 是椭圆型边值问题的解

$$Mu=-1, \quad 在\ \Omega\ 中, \tag{5.4.5}$$

$$u=0, \quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

我们看出若(5.4.1)式[或(5.4.5)式]有一光滑有界解，则

$$\tau_{\mathbf{x},s}<\infty \quad \text{a. s.}$$

[型如(5.4.1)式的后向抛物型方程的讨论见文献[28]，[79]和[80].](5.4.5)式称为**邓肯方程**[15].

(5.4.5)式的另一种推导是建立在后向柯尔莫哥洛夫方程的基础上. 令 $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 是在 $\partial\Omega$ 上具有吸收的(5.3.1)式的解 $\mathbf{x}(t)$ 的转移概率密度. 若 $\mathbf{x}\in\partial\Omega$ 则 $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)=0$，而且当 $t\to 0$ 时，$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\to\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. 对后向柯尔莫哥洛夫方程关于 t 从0到 ∞ 然后关于 $\mathbf{y}$ 在 Ω 上积分，便得到关于函数

$$v(\mathbf{x})=\int_{\Omega}\int_0^{\infty}p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)dt\,d\mathbf{y}$$

的方程(5.4.5). 另一方面，有

$$E_{\mathbf{x}}\tau=\int_0^{\infty}t d_t P_{\mathbf{x}}(\tau\leqslant t).$$

根据分部积分并且注意到 $P_{\mathbf{x}}(\tau>t)$ 是在时刻 t 轨道 $\mathbf{x}(t)$ 仍然在 Ω 中的概率，即

$$P_{\mathbf{x}}(\tau>t)=\int_{\Omega}p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)d\mathbf{y},$$

故有

$$E_{\mathbf{x}}\tau=\int_0^{\infty}\int_{\Omega}p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\,d\mathbf{y}dt.$$

交换积分次序，可看到 $E_{\mathbf{x}}\tau=v(\mathbf{x})$. 令 $q(\mathbf{x},t)$ 是下列问题的解

$$\begin{gathered}\frac{\partial q}{\partial t}+Mq=0,\quad T>t\geqslant s,\ \mathbf{x}\in\Omega,\\ q=1,\ \ \mathbf{x}\in\partial\Omega\times[s, T],\\ q(\mathbf{x}, T)=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega.\end{gathered}\tag{5.4.6}$$

运用伊藤公式，得到

$$Eq(\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s}\wedge T), \tau_{\mathbf{x},s}\wedge T)-q(\mathbf{x}, s)\equiv q(\mathbf{x}, s, T).$$

但是

$$\begin{aligned}Eq(\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s}\wedge T), \tau_{\mathbf{x},s}\wedge T)&=q(\mathbf{x}, T)P(\tau_{\mathbf{x},s}\wedge T=T)\\&\quad+\int_{\partial\Omega}\left[\int_s^T q(\mathbf{y}, z)P(\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s})=\mathbf{y},\ \tau_{\mathbf{x},s}=z)dz\right]dS_{\mathbf{y}}\\&=P(\tau_{\mathbf{x},s}<T).\end{aligned}$$

这样 $$P(\tau_{\mathbf{x},s}<T)=q(\mathbf{x}, s, T). \tag{5.4.7}$$
若(5.3.1)式是时齐的，则
$$P(\tau_{\mathbf{x}}<T)=q(\mathbf{x}, T).$$
(不失一般性，在这种情形下可以假设 $s=0$.)这样 $q(\mathbf{x}, T)$能够用分离变量法求得.

(b) 离出点的分布

令 $f(\mathbf{x})$ 是 $\partial\Omega$ 上的任意光滑函数并令 $u(\mathbf{x}, t)$ 是下列问题的解：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Mu=0, \quad t\geqslant s, \ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{5.4.8}$$
$$u(\mathbf{x}, t)=f(\mathbf{x}), \ \mathbf{x}\in\partial\Omega.$$

于是，如上述那样运用伊藤公式，使得柯尔莫哥洛夫公式

$$Eu(\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s}), \tau_{\mathbf{x},s})=u(\mathbf{x}, s) \tag{5.4.9}$$

或

$$\int_{\partial\Omega}f(\mathbf{y})P(\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s})=\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}=u(\mathbf{x}, s). \tag{5.4.9'}$$

这样，概率密度 $p=P(\mathbf{x}(\tau_{\mathbf{x},s})=\mathbf{y})$ 是问题 (5.4.8) 式的格林函数. 若(5.3.1)式是时齐的，则 p 是 $Mu=0$ 所对应的狄里克莱问题的格林函数.

附注 有时狄里克莱问题 $Mu=0$ 的解写成如下形式

$$u(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}},$$

并称 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$为格林函数. 在此情形下，$p=\frac{\partial}{\partial\nu}G$.

因此，在边界的一个给定部分 Γ 上离出的概率为

$$u(\mathbf{x})=\int_{\Gamma}p(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}.$$

这样 $u(\mathbf{x})$ 是下列问题的解

$$Mu=0, \ 在\ \Omega\ 中$$

$$u=1, \quad 在\ \Gamma\ 上,$$
$$u=0, \quad 在\ \partial\Omega-\Gamma\ 上.$$

[$\mathbf{b}$, $\sigma=\mathbf{b}(\mathbf{x})$, $\sigma(\mathbf{x})$ 是假设的.]

作为一个例子，我们考虑布朗运动 $w(t)$ 从区间$[a, b]$上的期望离出时间．令

$$v(x)=E_x\tau_{[a,b]},$$

这里 $\tau_{[a,b]}=\inf\{t\,|\,w(t)=a$ 或 $w(t)=b,\ w(0)=x\}$. 那么，按(5.4.1)式，有

$$\frac{1}{2}v''(x)=-1,$$
$$v(a)=v(b)=0.$$

于是
$$v(x)=(x-a)(b-x).$$

这样，$w(t)$ 在一有限时间内碰撞区间的边界.

若 $a=-\infty$，则 $v(x)=\infty$. 尽管时间是有限的，但是直至布朗运动碰撞点 b 时为止的期望时间却是无限的．因为，令 $q(x, t)$ 是下列问题的解：

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad x<b,$$
$$q(b, t)=1,$$
$$q(x, 0)=0.$$

则按(5.4.7)式，$P(\tau_b<t\,|\,w(0)=x)=q(x, t)$. 令$r(x, t)=1-q(x, t)$，便得到

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \quad -\infty<x<b, \tag{5.4.10}$$
$$r(b, t)=0,$$
$$r(x, 0)=1, \quad -\infty<x<b.$$

为了证明当 $t\to\infty$ 时 $q(x, t)\to 1$，须证 $r\to 0$. 这样便证得

$$P(\tau_b<\infty\,|\,w(0)=x)=1,$$

所以 $w(t)$ 在有限时间内碰撞 b.

为此目的，我们需解具有初始条件

$$r(x,\ 0)=1,\quad -\infty<x<b,$$
$$r(x,\ 0)=-1,\quad b<x<\infty$$

的初值问题(5.4.10).

令 $b-x=\xi$，便有

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2},$$
$$r(0,\ t)=0,$$
$$r(\xi,\ 0)=\pm 1,\quad 对\ \pm\xi>0.$$

解由(5.2.6)式给出，即

$$r(\xi,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{-(\xi-\eta)^2/2t}\,d\eta,$$

其中 $\varphi(\eta)=r(\eta,\ 0)$. 所以当 $t\to\infty$ 时

$$r(\xi,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty}\left[e^{-(\xi-\eta)^2/2t}-e^{-(\xi+\eta)^2/2t}\right]d\eta$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\xi/\sqrt{t}}^{\xi/\sqrt{t}}e^{-\xi^2/2}\,d\xi\to 0.$$

显然对一切 $t>0$, $r(0,\ t)=0$. 现在让我们考虑从一个有限区间上离出的问题. 在这种情形下需考虑在 $(a,\ b)$ 内具有边界条件 $r(a,\ t)=r(b,\ t)=0$ 及在 $(a,\ b)$ 内具有初始条件 $r(x,\ 0)=1$ 的问题(5.4.10). 我们将证明 $r(x,\ t)$ 就时间而论按指数衰减. 用 $r(x,\ t)$ 乘(5.4.10)式并积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 r^2(x,\ t)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 r(x,\ t)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(x,\ t)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2dx.$$

对任意使得 $r(a,\ t)=r(b,\ t)=0$ 的可微函数 $r(x,\ t)$，根据

柯西-许瓦尔兹不等式，有

$$|r(x,\ t)|^2=\left|\int_a^x \frac{\partial r}{\partial x}\,dx\right|^2\leqslant(b-a)\int_a^b\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2dx.$$

在 a 与 b 之间积分，得到

$$\int_0^1 r^2(x,\ t)dx\leqslant(b-a)^2\int_a^b\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2dx.$$

令 $\int_0^1 r^2(x,\ t)dx=\|r(x,\ t)\|^2$，有

$$\frac{d}{dt}\|r(x,\ t)\|^2\leqslant-\frac{1}{(b-a)^2}\|r(x,\ t)\|^2;$$

从而，当 $t\to\infty$ 时

$$\|r(x,\ t)\|^2\leqslant\|r(x,\ 0)\|^2e^{-t/(b-a)^2}\to 0.$$

由此得出：对于一长度为 t 的时间区间，一个布朗质点停留在一个有限区间上的概率就 t 而论按指数衰减.

对一个布朗运动，若给定 $w(0)=x$ 与 $a<x<b$，为求在到达点 b 之前先到达点 a 的概率，必须解出方程(5.4.8)：

$$\frac{1}{2}u''(x)=0,$$

$$u(a)=1,$$

$$u(b)=0,$$

即，$u(x)=(b-x)/(b-a)$. 故

$$P(w(\tau_{[a,b]})=a\,|\,w(0)=x)=\frac{b-x}{b-a}.$$

我们将看到离出的概率与离出时间有很重要的物理解释，而且在较高维情形下它们的计算是不容易的.

习题 5.4.1

令 $\zeta(t)$ 是方程 $d\zeta(t)=a(\zeta)dt+b(\zeta)dw(t)$ 在 $[\alpha,\ \beta]$ 上的解，并且令 α 与 β 是反射边界，证明

$$E\tau_{x,y}=V_0(y)-V_0(x),\quad (\alpha<x<y<\beta),$$

其中 $$\frac{\sigma^2(x)}{2}V_0''(x)+a(x)V_0'(x)=1,\quad V_0'(\alpha)=0.$$

若 $a<y<x<b$, 则

$$E\tau_{x,y}=V_1(y)-V_1(x),$$

这里 V_1 满足与 $V_0(x)$ 相同的方程,且 $V_1'(\beta)=0$.

习题 5.4.2

令 $\zeta(t)$ 如习题5.4.1中所设,

$$f(x,\ y,\ t)=P\{\zeta(t)<y\,|\,\zeta(0)=x\}.$$

证明: f 在 $(\alpha,\ \beta)$ 中满足福克尔-普朗克方程,其边界条件和初始条件分别为 $f(x,\ \alpha,\ t)=0$, $f(x,\ \beta,t)=1$ 和 $f(x,y,0)=\theta_x(y)$, 若 $y<x$, 则 $\theta_x(y)=0$; 若 $y\geqslant x$, 则 $\theta_x(y)=1$. 证明当 $t\to\infty$ 时 $f(x,\ y,\ t)\to f(y)$. 并求 $f(y)$ 所满足的微分方程与边界条件以及求 $f(y)$ 的显式解.

习题 5.4.3

求一个布朗质点从 $x<0$ 出发到第一次碰撞直线 $x=at+b$ 时为止的期望时间.

(c) 随机微分方程解的稳定性:李雅普诺夫判别法

随机微分方程解的稳定性的概念本质上不同于常(确定型)微分方程的情形. 对于一个由微分方程描述的确定型系统, 我们说系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{b}(\mathbf{x}) \tag{5.4.11}$$

的解 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 是稳定的, 如果对任意正数 ε, 存在两个数 $\delta>0$ 与 T, 使得(5.4.11)式的任意解 $\mathbf{x}(t)$, 对某个 $t_0\leqslant T$ 只要当

$$|\mathbf{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}(t_0)|<\delta \tag{5.4.12}$$

时有 $$|\mathbf{x}(t)-\boldsymbol{\xi}(t)|<\varepsilon,\quad t\geqslant T.$$

解 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 称为渐近稳定的, 如果它是稳定的, 并且对满足方程

(5.4.11) 的任意解 $\mathbf{x}(t)$ 有

$$\lim_{t\to\infty}|\mathbf{x}(t)-\boldsymbol{\xi}(t)|=0. \qquad (5.4.13)$$

如果对(5.4.11)式的一切解(5.4.13)式成立，则 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 称为全局稳定的.

令 $\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\xi}(t)+\mathbf{y}(t)$，并假设 $\mathbf{b}(x)$ 是光滑的，则我们可把 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的稳定性问题化为系统

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{B}(t)\mathbf{y}+\mathbf{C}(t,\ \mathbf{y}) \qquad (5.4.14)$$

的解 $\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}$ 的稳定性问题，其中

$$[\mathbf{B}(t)]_{ij}=\left.\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\xi(t)}$$

而且式中 $\mathbf{C}(t,\ \mathbf{y})=o(|\mathbf{y}|)$，当 $|\mathbf{y}|\to 0$. 若矩阵 $\mathbf{B}(t)$ 是常数矩阵，即与 t 无关，以及 $\mathbf{B}$ 的特征值的实部是负的，则解 $\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的，所以作为(5.4.11)式的解 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 是渐近稳定的.

若点 $\mathbf{x}_0$ 使 $\mathbf{b}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$，则称它为(5.4.11)式的一个临界点. 在这种情形下，$\boldsymbol{\xi}(t)=\mathbf{x}_0$ 是 (5.4.11) 式的一个解. 若 $\mathbf{x}_0$ 是 (5.4.11) 式的一个临界点，则 (5.4.14) 式中的 $\mathbf{B}(t)$ 是常数矩阵. 检验临界点，例如 $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$ 的稳定性的另一种方法，是由李雅普诺夫给出的. 函数 $V(\mathbf{x})$ 称为(5.4.11)式在 $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$ 处的一个李雅普诺夫函数，如果(i) $V(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{0}$ 的一个邻域中是有定义的，连续的，且是可微的; (ii) 若 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，$V(\mathbf{x})>0$ 且 $V(\mathbf{0})=0$; 及 (iii) 在 $\mathbf{0}$ 的一个邻域中 $\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\nabla V(\mathbf{x})\leqslant 0$. 如果系统 (5.4.11) 有一个李雅普诺夫函数，那么 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是给定 $\mathbf{b}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 时的一个稳定解. 若

$$\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\nabla V(\mathbf{x})<0, \quad \text{对 } \mathbf{x}\neq\mathbf{0},$$

则 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的.

例如考虑线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad (5.4.15)$$

如果方程 $\mathbf{A}^T\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{A}=-\mathbf{Q}$ 对某个正定矩阵 $\mathbf{Q}$ 有正定解 $\mathbf{X}$，那么函数

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{X}\mathbf{x}$$

是(5.4.15)式的一个李雅普诺夫函数．事实上，对 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，

$$\nabla V(\mathbf{x})\cdot\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{X}\mathbf{x}=-\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}<0$$ [10,84]．

习题 5.4.4

令 $\mathbf{A}$ 是一个实 2×2 矩阵．在(x, y)平面上 $x=y=0$ 的附近，描绘出系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

的解的轨线．考虑 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ_1 和 λ_2 的可能性：

(i) $\lambda_1<\lambda_2<0$(结点)；

(ii) $0<\lambda_1<\lambda_2$(结点)；

(iii) $\lambda_1<0<\lambda_2$(一个鞍点)；

(iv) $0\neq\lambda_1=\lambda_2$(正则结点)；

(v) $\mathrm{Im}\,\lambda\neq0$, $\mathrm{Re}\,\lambda\neq0$(螺线或焦点)；

(vi) $\mathrm{Im}\,\lambda\neq0$, $\mathrm{Re}\,\lambda=0$(中心)．

说明在每一种情形中原点的稳定性．

习题 5.4.5

根据曲面 $\mathbf{y}=\phi(\mathbf{x})$ 的几何性质讨论系统

$$\dot{\mathbf{x}}=-\nabla\phi(\mathbf{x})$$

的临界点的稳定性．

为简单起见我们假设 (5.3.1) 式是时齐的．若对一切 $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ 有 $\sigma\neq\mathbf{0}$，则算子 M 是一致椭圆的．众所周知在这种情形下方程(5.4.5)有一有界解．由 (5.4.4) 式得出 $\tau_{\mathbf{x},s}<\infty$ a. s.．这样 $\mathbf{x}(t)$ 将在几乎处处有限时间内离开任意有界区域，

即不管 σ 的大小怎样，甚至确定型系统 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 是全局稳定的，而随机系统(5.3.1)式是不稳定的。

我们看到对确定型系统，即使是最小的白噪声型扰动，都将导致质点越出每一有界集。因此我们将考虑 $\mathbf{b}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 与 $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 的情况，使得 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是一平衡点(凹陷点)。对 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，令 $V(\mathbf{x})>0$ 且 $V(\mathbf{0})=0$，并令 $MV\leqslant 0$，那么 V 称为李雅普诺夫函数。由伊藤公式，对于(5.3.1)式得到

$$0\leqslant V(\mathbf{x}(t))=V(\mathbf{x})+\int_0^t MV(\mathbf{x}(s))ds+\int_0^t \nabla V\cdot\sigma d\mathbf{w}(s)$$

$$\leqslant V(\mathbf{x})+\int_0^t \nabla V\cdot\sigma d\mathbf{w}(s)\equiv V(\mathbf{x})+f(t).$$

从柯尔莫哥洛夫不等式(2.3.8)，得到

$$P\{\sup_{t>0}[V(\mathbf{x})+f(t)]>V(\mathbf{x})+\varepsilon\}\leqslant\frac{V(\mathbf{x})}{\varepsilon+V(\mathbf{x})}\leqslant\frac{V(\mathbf{x})}{\varepsilon};$$

所以 $$P\{\sup_{t>0}V(\mathbf{x}(t))<V(\mathbf{x})+\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{V(\mathbf{x})}{\varepsilon}.$$

对任意正数 ε_1 和 ε_2，能够找到一个正数 $\delta>0$ 使得若 $|\mathbf{x}|<\delta$ 有

$$P_{\mathbf{x}}\{\sup_{t>0}|\mathbf{x}(t)|<|\mathbf{x}|+\varepsilon_1\}\geqslant 1-\varepsilon_2. \tag{5.4.16}$$

(5.4.16)式的意义是，除去一具有任意小的正概率的轨线集合外，所有由充分接近于原点开始的轨线对一切时间仍然在原点的邻域中。

如果(5.4.16)式成立，则称原点是随机稳定的，在这种情形下得出

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0}P_{\mathbf{x}}\{\sup_{t>0}|\mathbf{x}(t)|\geqslant\varepsilon\}=0.$$

如果除稳定性外还有

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0}P_{\mathbf{x}}\{\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}\}=1,$$

则称原点是随机渐近稳定的. 如果对一切 $\mathbf{x}\in R^n$ 有

$$P_{\mathbf{x}}\{\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}\}=1 \tag{5.4.17}$$

则称原点是全局渐近稳定的.容易证明,如果李雅普诺夫函数对 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 满足严格不等式 $MV<0$, 那么原点是随机渐近稳定的. 此外,如果当 $|\mathbf{x}|\to\infty$ 时 $V(\mathbf{x})\to\infty$,那么原点在(5.4.17)式的意义上是全局渐近稳定的. 特别,如果对某个 $k>0$, 有

$$MV\leqslant -kV,$$

那么我们有全局稳定性.

例如考虑一维线性方程

$$dx=ax\,dt+bx\,dw.$$

其解为
$$x(t)=x(0)e^{(a-b^2/2)t+bw(t)}.$$

由于当 $t\to\infty$ 时 $w(t)/t\to0$[$sw(1/s)$是$s=1/t$的布朗运动],故有

$$x(t)\to0,\quad 若\quad a-\frac{b^2}{2}<0.$$

$$x(t)\to\infty,\ 若\quad a-\frac{b^2}{2}>0.$$

若 $a=b^2/2$, 则 $x(t)=x(0)e^{bw(t)}$, 因此 $P(\limsup_{t\to\infty}x(t)=+\infty)=1$.

用李雅普诺夫函数方法可得出同样的结果: 令 $V=|x|^\alpha$, 那么

$$MV=\left[a+\frac{1}{2}b^2(\alpha-1)\right]\alpha|x|^\alpha.$$

若 $a-b^2/2<0$, 则可选择 $0<\alpha<1-2a/b^2$ 并且得到李雅普诺夫函数 V 使得 $MV\leqslant-kV$, $k>0$.

习题 5.4.6

对其余两种情况,构造李雅普诺夫函数并说明随机不稳定性.

注意到系统的稳定性不是由 a 而是由 $a-\frac{b^2}{2}$ 所决定，即由等价的斯特拉脱诺维奇方程

$$(S)dx=\left(a-\frac{b^2}{2}\right)x\,dt+bx\,d_s w$$

中的偏移系数所决定．这再次说明斯特拉脱诺维奇方程对于物理现象来说，通常是一个比伊藤方程更为恰当的模型． 考虑齐次线性方程组

$$d\mathbf{x}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}\,dt+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{B}_i(t)\mathbf{x}\,dw_i, \qquad (5.4.18)$$

这里 $w_i(t)$ 是独立布朗运动．对方程 (5.4.18) 取数学期望，得到关于 $\mathbf{y}(t)=E_x\mathbf{x}(t)$ 的线性方程

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \qquad (5.4.19)$$

故若 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 作为方程(5.4.18)的解是稳定的，则 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 必定是一个稳定解．如果原点是稳定的，则 $\mathbf{x}(t)$的协方差矩阵当 $t\to\infty$ 时为不增，如果下列系统的原点是稳定的，这种情形可发生：

$$\dot{\mathbf{Z}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t)+\mathbf{Z}(t)\mathbf{A}^T(t)+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i(t)\mathbf{Z}(t)\mathbf{B}_i^T(t) \qquad (5.4.20)$$

其中 $$(\mathbf{Z}(t))_{ij}=E_x x_i(t)x_j(t).$$

当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}_i$ 与时间无关时，如果代数系统

$$\mathbf{AZ}+\mathbf{ZA}^T+\sum\mathbf{B}_i\mathbf{ZB}_i^T=-\mathbf{C}$$

对某一对称正定矩阵 $\mathbf{C}$ 有一对称正定解 $\mathbf{Z}$，那么系统(5.4.20)具有稳定性．

习题 5.4.7

从偏微分方程观点，考虑具有定常系数的一维齐次线性方程的稳定性问题，更准确地说，考虑关于区间 $[\varepsilon, 1]$ 上平均离出时间与离出时间分布的偏微分方程有界解的存在性，并计算当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限．在这种情形下求在碰撞 ε 之前先碰撞 1 的概率．

习题 5.4.8

考虑具有噪声系数的二阶线性方程

$$\ddot{x}+(a+b\dot{w}_1)\dot{x}+(c+d\dot{w}_2)x=0,$$

其中 w_1 与 w_2 是独立布朗运动．把此方程变换成伊藤型，并运用劳斯-霍尔维茨判别法，证明稳定性条件是

$$b^2<2a,\ d^2<(2a-b^2)c$$

[对稳定性的进一步讨论见文献[44]]．

习题 5.4.9

令 $a(0)=\sigma(0)=0$ 并令 $x(t)$ 是方程

$$dx(t)=a(x)dt+\sigma(x)dw,$$
$$w(0)=x_0>0$$

的解．证明对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $0<x_0<\delta$ 时

$$P_{x_0}(\lim_{t\to\infty}x(t)=0)\geqslant 1-\varepsilon,$$

当且仅当

$$\int_0^\delta \exp\left\{\int_0^s \frac{2a(t)}{\sigma^2(t)}\,dt\right\}ds<\infty.$$

由此得出：若 $\sigma(x)=\sigma_0x+o(x)$ 和 $a(x)=a_0x+o(x)$，则稳定性条件是

$$\frac{a_0}{\sigma_0^2}<\frac{1}{2}.$$

习题 5.4.10

对于不同的常数 a 值，研究方程

$$dx=ax\,dt+\sqrt{1+x^2}\,dw \qquad (5.4.21)$$

在原点的稳定性．在稳定的情况下求平稳分布．在伊藤意义下和在斯特拉脱诺维奇意义下解释(5.4.21)式(这个例题是由萨凯给出的)．

第六章　随机微分方程的渐近分析

6.1　斯莫路苏斯基-克拉美逼近

考虑在引力场中一个质点的朗之万方程

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}}{dt}&=\mathbf{y},\\
\frac{d\mathbf{y}}{dt}&=-\beta\mathbf{y}+\mathbf{K}(\mathbf{x})+\sqrt{\frac{2\beta kT}{m}}\frac{d\mathbf{w}}{dt}.
\end{aligned}
\tag{6.1.1}
$$

在典型的情况中，$\beta\approx10^{9}\sim10^{10}$，而 $\frac{kT}{m}\approx1$. 因此我们可以考虑 β 是一个大参数，而且试图当 $\beta\to\infty$ 时扩展其解.

设 $t=\beta s$ 以改变时间尺度，注意到 $\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\mathbf{w}(\beta s)=\widetilde{\mathbf{w}}(s)$ 是一个布朗运动，以及在(6.1.1)式中设 $\mathbf{y}^{\beta}(s)=\mathbf{y}(\beta s)$和 $\mathbf{x}^{\beta}(s)=\mathbf{x}(\beta s)$，得到

$$
\left.
\begin{aligned}
d\mathbf{x}^{\beta}(s)&=\beta\mathbf{y}^{\beta}(s)ds\\
d\mathbf{y}^{\beta}(s)&=\beta p d\widetilde{\mathbf{w}}(s)-\beta^{2}\mathbf{y}^{\beta}(s)ds\\
&\quad+\beta\mathbf{K}(\mathbf{x}^{\beta}(s))ds,
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.1.2}
$$

其中 $p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$，现在令 $\mathbf{z}^{\beta}(s)$ 是

$$
\left.
\begin{aligned}
d\mathbf{z}^{\beta}(s)&=\beta p d\widetilde{\mathbf{w}}(s)-\beta^{2}\mathbf{z}^{\beta}(s)ds\\
\mathbf{z}(0)&=\mathbf{y}_{0}
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.1.3}
$$

的解，令 $\mathbf{y}^{\beta}(s)=\mathbf{z}^{\beta}(s)+\mathbf{v}^{\beta}(s)$. 我们将确定 $\mathbf{v}^{\beta}(s)$:

$$dy^{\beta}(s)=dz^{\beta}(s)+dv^{\beta}(s)=\beta p d\widetilde{w}(s)-\beta^2 z^{\beta}(s)ds+dv^{\beta}(s)$$
$$=\beta d\widetilde{w}(s)-\beta^2 y^{\beta}(s)ds+\beta^2 v^{\beta}(s)ds+dv^{\beta}(s). \tag{6.1.4}$$

把(6.1.3)式代入(6.1.4)式中，得到关于 $v^{\beta}(s)$ 的常微分方程，即

$$\frac{dv^{\beta}(s)}{ds}=-\beta^2 v^{\beta}(s)+\beta K(x^{\beta}(s)),$$

其解为
$$v^{\beta}(s)=\beta\int_0^s e^{-\beta^2(s-r)}K(x^{\beta}(r))dr.$$

(6.1.3)式的解为

$$z^{\beta}(s)=y_0 e^{-\beta^2 s}+p\int_0^s \beta e^{-\beta^2(s-r)}d\widetilde{w}(r).$$

设 $\hat{y}(s)=\beta y^{\beta}(s)$，从(6.1.1)式得到

$$\hat{y}(s)=\hat{y}_0 e^{-\beta^2 s}+p\int_0^s \beta^2 e^{-\beta^2(s-r)}d\widetilde{w}(r)$$
$$+\int_0^s \beta^2 e^{-\beta^2(s-r)}K(x^{\beta}(r))dr.$$

积分 $\hat{y}(s)$，作某些运算以后得到

$$x^{\beta}(s)=x_0+\int_0^s \hat{y}(s)ds$$
$$=\frac{1}{\beta^2}\hat{y}_0(1-e^{-\beta^2 s})+p\beta^2\int_0^s \widetilde{w}(r)e^{-\beta^2(s-r)}dr$$
$$+\int_0^s\int_0^t \beta^2 e^{-\beta^2(t-r)}K(x^{\beta}(r))dr\,dt.$$

由于当 $\beta\to\infty$，$s\geqslant r$ 时，$\beta^2 e^{-\beta^2(s-r)}\to\delta(s-r)$，故有 $x^{\beta}(s)\to\tilde{x}(s)$，此处

$$\tilde{x}(s)=\tilde{x}_0+p\widetilde{w}(s)+\int_0^s K(\tilde{x}(r))dr,$$

此方程等价于下列随机微分方程

$$d\tilde{\mathbf{x}}(s)=\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{x}}(s))ds+\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,d\tilde{\mathbf{w}}(s), \qquad (6.1.5)$$

这里 $t=\beta s$. 方程 (6.1.5.) 称为斯莫路苏斯基-克拉美(Smoluchowski-Kramers)逼近. 对应于(6.1.1)式的福克尔-普朗克方程为

$$\frac{kT}{m}\Delta u-\nabla\cdot(\mathbf{K}u)=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

方程 (6.1.5) 式的各种不同的推导方法可在数学文献[9], [78]与[80]中找到.

我们将给出两个补充的推导. 下面一个推导是在具有更一般噪声的随机微分方程的假设下由帕波尼科罗(Papanicolaou)[78]给出的. 它是建立在后向柯尔莫哥洛夫方程的解按照 β^{-1} 的渐近展开式的基础上. 这能在长为 β^{-1} 级的时间区间上做到. 为此我们令 $t=\beta s$, 并注意到

$$\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}}\right)(\beta s)=\tilde{\mathbf{w}}(s)$$

是一个布朗运动, 从(6.1.1)式得到方程

$$dy^\beta(s)=\{-\beta^2 y^\beta(t)+\beta\mathbf{K}(x^\beta(s))\}ds+\beta\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,d\tilde{\mathbf{w}}(s),$$

这里 $y^\beta(s)=y(\beta s)$. 为简单起见考虑一维情形.

设 $\beta=\frac{1}{\varepsilon}$, 我们得到后向柯尔莫哥洛夫方程

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s}=\frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{kT}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}\right\}+\frac{1}{\varepsilon}y\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{K}(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}. \qquad (6.1.6)$$

方程(6.1.6)是一个典型的奇异摄动问题. 设 $u^\varepsilon=u_0+\varepsilon u_1+\cdots$ 并且比较(6.1.6)式中 ε 的同次幂的系数, 看出

$$\mathfrak{L}_1 u_0 \equiv \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - y \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \qquad (6.1.7)$$

这里 u_0 假设为有界. (6.1.7)式的解由下式给出:

$$u_0(x,\ y,\ s) = C_1(x,\ s) + C_2(x,\ s) e^{my^2/kT}.$$

所以必有 $C_2(x,\ s) \equiv 0$; 从而 $u_0(x,\ y,\ s) = u_0(x,\ s)$. 下一步, 我们得到

$$\mathfrak{L}_1 u_1 \equiv \left\{ -y \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mathbf{K}(x) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\} = -\mathfrak{L}_2 u_0 \qquad (6.1.8)$$

和

$$\mathfrak{L}_1 u_2 = -\mathfrak{L}_2 u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial s}. \qquad (6.1.9)$$

众所周知 (6.1.8) 式的可解性条件[12]是 $\mathfrak{L}_2 u_0 \perp u^*$, 即对伴随方程 $\mathfrak{L}_1^* u^* = 0$ 的任意解 u^* 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^* \mathfrak{L}_2 u_0 \, dy = 0.$$

此条件能满足, 因为变换 $y \to -y$ 使下列方程保持不变, 即

$$\mathfrak{L}_1^* u^* = \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial y u^*}{\partial y} = 0.$$

所以 $u^*(-y) = u^*(y)$, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^* \mathfrak{L}_2 u_0 \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(y) \left(-y \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mathbf{K}(x) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) dy$$

$$= -\frac{\partial u_0}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} y u^*(y) dy = 0.$$

这样 $u_1 = \mathfrak{L}_1^{-1} \mathfrak{L}_2 u_0$ 是有定义的 (在规范化上). (6.1.9) 式的可解性条件蕴涵着

$$\left\{ -\mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_1^{-1} \mathfrak{L}_2 u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial s} \right\} \perp u^*;$$

$$\int \frac{e^{-(m/2kT)y^2}}{(2\pi kT/m)^{1/2}}\left\{-y\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{K}(x)\frac{\partial}{\partial y}\right\}\mathfrak{L}_1^{-1}$$

$$\times\left(-y\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{K}(x)\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0(x,s)dy=\frac{\partial u_0}{\partial s}. \qquad (6.1.9')$$

首先，我们得到

$$v=\mathfrak{L}_1^{-1}\left(-y\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{K}(x)\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0=\mathfrak{L}_1^{-1}\left(-y\frac{\partial u_0}{\partial x}\right).$$

函数 v 是下列方程的解：

$$\frac{kT}{m}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-y\frac{\partial v}{\partial y}=-Cy,$$

这里常数 C 等于 $\frac{\partial u_0(x,s)}{\partial x}$. 这个方程的解是 $v=Cy$, 于是 (6.1.9')式取为如下的形式：

$$\int\frac{e^{-(m/2kT)y^2}}{\sqrt{2\pi kT/m}}\left[\left(-y\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{K}(x)\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-y\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]dy=\frac{\partial u_0}{\partial s}$$

或 $$\int\frac{e^{-(m/2kT)y^2}}{\sqrt{2\pi kT/m}}\left[y^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mathbf{K}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]dy=\frac{\partial u_0}{\partial s}.$$

从而 $$\frac{kT}{m}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\mathbf{K}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{\partial u_0}{\partial s}. \qquad (6.1.10)$$

方程 (6.1.10) 是后向柯尔莫哥洛夫方程的斯莫路苏斯基-克拉美逼近，这个渐近分析说明在长为 β^{-1} 级的时间区间上，位移分布是由随机微分方程(6.1.5)决定的；所以位移过程 $x(t)$ 为马尔可夫型，且与速度过程 $y(t)$ 独立. 由此得出 $(x(t), y(t))$的联合密度函数 P 形式必为

$$P(x,y,t)\approx p(y)u(x,t).$$

把这些表达式代入到福克尔-普朗克方程，便有

$$\frac{\partial(yp)}{\partial y}+\frac{kT}{m}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0,$$

从而 $$p(y)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\,e^{-my^2/2kT},$$

所以速度分布是麦克斯韦型的. 在短时间内 $(x(t), y(t))$ 是马尔可夫型的,但 $x(t)$ 与 $y(t)$ 却不是; 并且, $x(t)$ 与 $y(t)$ 是相依变量.

斯莫路苏斯基-克拉美方程的第三个推导是由拉森(Larsen)和可曲斯 (Schuss)[55] 给出的. 该推导过程中采用的步骤是建立在福克尔-普朗克方程解的渐近展开式的基础上,并把此方程看作为一个迁移方程来考虑. 称为齐次化的同样的方法, 可以用来推导迁移方程的扩散逼近(见这一节的习题). 我们假设力 $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ 是一个位势的梯度,即,

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})=-\nabla\Phi(\mathbf{x}).$$

如果

$$\max_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x})\gg\frac{kT}{m},$$

福克尔-普朗克方程的解可以有很大的梯度. 例如, 若 $\Phi(\mathbf{x})$ 是一个化学反应的位势,就是这种情形. 此外, 如果 $\Phi(\mathbf{x})$ 是以晶胞 C 为周期的函数, 例如晶体中原子迁移的情形, 在上述推导中,当运用解的展开式中的第一项 $u_0(\mathbf{x}, s)$ 时,没有考虑到可能出现大梯度的情形. 我们将假定 $\Phi(\mathbf{x})$是晶胞 C 的周期函数,它的特征维数是 l.

开始引进如下的无量纲变量:

$$\mathbf{r}=\left(\frac{1}{l}\right)\mathbf{x}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{v_0}\right)\mathbf{v}$$

$$\tau=\left(\frac{v_0}{l}\right)t.$$

这里 l 是晶胞 C 的特定直径且 v_0 是特定质点速度, 这样, $\mathbf{r}$ 是无量纲的位置变量,根据$\mathbf{r}$可得特定晶胞的直径是 $O(1)$; $\mathbf{w}$ 是无量纲速度变量, 据此, 特定质点速度是 $O(1)$; τ 是无量纲时间变

量，据此，对一个标准质点不受 Φ 的影响通过一个晶胞所需时间是 $O(1)$. 此外，还定义

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{v_0}{\beta l}},$$

$$\lambda=\frac{kT}{mv_0^2}, \tag{6.1.11}$$

和

$$\phi(\mathbf{r},\ \varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(\mathbf{r})+\phi_1(\mathbf{r})=\left(\frac{1}{v_0^2}\right)\Phi(\mathbf{x}), \tag{6.1.12}$$

$$\psi(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\omega},\ \tau)=\left(\frac{1}{l^3v_0^3}\right)P(\mathbf{x},\ \mathbf{v},\ t), \tag{6.1.13}$$

通过对朗之万方程的推导，可以证明相空间中点 $(\mathbf{x},\ \mathbf{v})$ 的转移概率密度

$$P(\mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ t)=Pr\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\ \mathbf{v}(t)=\mathbf{v}\,|\,\mathbf{x}(0)=\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{v}(0)=\boldsymbol{\eta}\}$$

满足福克尔-普朗克方程

$$0=\frac{\partial P}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_x P-\nabla_x\Phi\cdot\nabla_v P-\beta\nabla_v(\mathbf{v}P)-\frac{\beta kT}{m}\Delta_v P,$$

$$P(\mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ 0)=\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(\mathbf{v}-\boldsymbol{\eta}).$$

在(6.1.12)式中要求

$$\min_{\mathbf{r}\in\partial C}\phi_i(\mathbf{r})=O(1),\quad i=0,\ 1$$

其中 ∂C 是晶胞 C 的边界. 此外，可以允许 $\phi_0=0$ 或 $\phi_1=0$(或两者均为 0). 这样，对 $\varepsilon\ll1$ 时，基于上述分析，考虑到

$$\min_{\mathbf{x}\in\partial C}\Phi(\mathbf{x})$$

则激活能的量值有下列三种可能性：或取值很大 [即 $O(\varepsilon^{-1})=O(\sqrt{\beta})$]，或是 $O(1)$，或是 0.

我们分析的出发点是福克尔-普朗克方程. 这样把上述诸方程引入到福克尔-普朗克方程，得到

$$0=\varepsilon^2\left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_x\psi-\nabla_x\phi_1\cdot\nabla_\omega\psi\right]-\varepsilon[\nabla_x\phi_0\cdot\nabla_\omega\psi]$$

$$-[\nabla_\omega\cdot(\boldsymbol{\omega}\psi)+\lambda\Delta\boldsymbol{\omega}\psi].\qquad(6.1.14)$$

对 $\varepsilon\ll1$，我们来研究这个方程．由 (6.1.11) 式，知粘度 β 与频率 v_0/l 相比是很大的，据此，质点可不受 ϕ 的影响通过一个晶胞．方程(6.1.14)有平衡解

$$\psi=\exp\left[-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0+\phi_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2\right)\right],\ \boldsymbol{\omega}^2=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}.$$

在一个有限张弛时间后，ψ 应当有如上指出的基于空间和时间变量的形式，．这样，假设(6.1.14)式中的 ψ 取为：

$$\psi\sim\exp\left[-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0+\phi_1+\frac{1}{2}\omega^2\right)\right]\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n(\mathbf{y};\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega},\tau;s,\sigma),\qquad(6.1.15)$$

此处

$$\mathbf{y}=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{x},\quad s=\varepsilon\tau,\quad \sigma=\varepsilon^2\tau.\qquad(6.1.16)$$

空间变量 $\mathbf{y}$ 描述边界层，如果它存在，且 s, σ 是慢时间变量．

把(6.1.15)式和(6.1.16)式代入到 (6.1.14) 式，并比较 ε 的不同幂的系数，得到如下的方程组：

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_\omega\psi_n-\lambda\Delta_\omega\psi_n=[\nabla_y\phi_0\cdot\nabla_\omega\psi_{n-1}-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_y\psi_{n-1}]$$

$$-\left[\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_x\psi_{n-2}+\nabla_x\phi_1\cdot\nabla_\omega\psi_{n-2}+\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_{n-2}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\psi_{n-3}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_{n-4}.\qquad(6.1.17)$$

当 $\boldsymbol{\omega}\to\infty$ 时我们舍去 ψ_n 关于 $\boldsymbol{\omega}$ 的指数项，并要求每一个 ψ_n 至多具有关于 $\boldsymbol{\omega}$ 的多项式项．那么，由 (6.1.15) 式，当 $\boldsymbol{\omega}\to\infty$时 ψ 实质上按指数衰减．

在(6.1.17)式中，令 $n=0$, 得到

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_\omega\psi_0-\lambda\Delta_\omega\psi_0=0.$$

这个方程有有界解

$$\psi_0=A(\mathbf{y};\ \mathbf{r},\ \theta;\ s;\ \sigma),\tag{6.1.18}$$

这里 A(至此为止)是待定的.

下一步，在(6.1.17)式中，取 $n=1$ 得到

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_\omega\psi_1-\lambda\nabla_\omega\psi_1=-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}A.$$

这个方程有多项式解

$$\psi_1=-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}A(\mathbf{y};\ \mathbf{r},\ \tau;\ s;\ \sigma).$$

可以在 ψ_1 的表达式中加上齐次方程的解，但我们不这样做，因为这个解可以计入 A 中.

在(6.1.17)式中，令 $n=2$, 经过重新整理，得到

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_\omega\psi_2-\lambda\Delta_\omega\psi_2=\{-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}A\}+\{\nabla_{\mathbf{y}}\cdot[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T-\lambda\mathbf{I}]\cdot\nabla_{\mathbf{y}}A\}$$
$$+\left\{\lambda\Delta_{\mathbf{y}}A-\nabla_{\mathbf{r}}\phi_0\cdot\nabla_{\mathbf{y}}A-\frac{\partial A}{\partial\tau}\right\}.\tag{6.1.19}$$

这里 $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T$ 是矩阵，它的元素是 $\{\omega_i\omega_j\}$. 因为非齐次方程

$$[\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_\omega-\lambda\Delta_\omega]f(\boldsymbol{\omega})=1$$

有特解：$$f(\boldsymbol{\omega})=-\frac{1}{\lambda}\int_{r=0}^{\omega}\frac{e^{r^2/2\lambda}}{r^2}\int_{s=0}^{t}s^2e^{-s^2/2\lambda}ds\,dr,$$

它是一个按指数律增长的函数，仅当(6.1.19)式最后一项为 0 时，解 ψ_2 才是$\boldsymbol{\omega}$的多项式，否则，ψ_2 关于 $\boldsymbol{\omega}$ 按指数律增长.所以，我们假设最后一项等于 0. 故(6.1.19)式的“可解性条件”为

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}=\lambda\Delta_{\mathbf{y}}A-\nabla_{\mathbf{r}}\phi_0\cdot\nabla_{\mathbf{y}}A.\tag{6.1.20}$$

于是 u_2 由下式给出：

$$u_2=-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}A(\mathbf{y};\ \mathbf{r},\ \tau;\ s;\ \sigma)$$
$$+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_{\mathbf{y}})^2A(\mathbf{y};\ \mathbf{r},\ \tau;\ s;\ \sigma).$$

如上，在 v_2 的表达式中我们没有计入齐次方程的解。

对于 $n=3$ 与 4，我们继续以上的步骤解(6.1.17)式．因为我们感兴趣的仅是可解性条件，且遵循如上的计算步骤，所以我们只叙述这些条件．对 $n=3$，得到

$$\frac{\partial A}{\partial s}=2\lambda\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}A-\nabla_{\mathbf{r}}\phi_0\cdot\nabla_{\mathbf{r}}A-\nabla_{\mathbf{r}}\phi_1\cdot\nabla_{\mathbf{y}}A, \quad (6.1.21)$$

以及对 $n=4$

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma}=\lambda\nabla_{\mathbf{r}}A-\nabla_{\mathbf{r}}\phi_1\cdot\nabla_{\mathbf{r}}A. \quad (6.1.22)$$

根据三个时间变量 τ，s 与 σ 和二个位置变量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{y}$，方程(6.1.20)～(6.1.22) 描述了 A 的演化．我们可把这些方程组合成关于 $a(\mathbf{r},\sigma)$ 的一个单独的方程，此处

$$a(\mathbf{r},\sigma)=A(\mathbf{y};\mathbf{r},\tau;s;\sigma), \quad (6.1.23)$$

其中变量的相关性由(6.1.16)式显示出．根据(6.1.12)式，(6.1.16)式，和(6.1.20)式～(6.1.22)，有

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\frac{\partial a}{\partial\sigma}&=\frac{\partial A}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial s}+\varepsilon^2\frac{\partial A}{\partial\sigma}\\&=\varepsilon^2\lambda\left(\nabla_{\mathbf{r}}+\frac{1}{\varepsilon}\nabla_{\mathbf{y}}\right)\cdot\left(\nabla_{\mathbf{r}}+\frac{1}{\varepsilon}\nabla_{\mathbf{y}}\right)A\\&\quad-\varepsilon^2\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0+\phi_1\right)\cdot\left(\nabla_{\mathbf{r}}+\frac{1}{\varepsilon}\nabla_{\mathbf{y}}\right)A\\&=\varepsilon^2\lambda\Delta_{\mathbf{r}}a-\varepsilon^2\nabla_{\mathbf{r}}\phi\cdot\nabla_{\mathbf{r}}a.\end{aligned}$$

因此，根据(6.1.12)，(6.1.15)，(6.1.18)和(6.1.23)式，

$$\psi\sim\exp\left[-\frac{1}{\lambda}\left(\phi(\mathbf{r})+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2\right)\right]a(\mathbf{r},\sigma), \quad (6.1.24)$$

其中

$$\frac{\partial a}{\partial\sigma}=\lambda\Delta_{\mathbf{r}}a-\nabla_{\mathbf{r}}\phi\cdot\nabla_{\mathbf{r}}a. \quad (6.1.25)$$

方程(6.1.24)与(6.1.25)描述时间很大时的福克尔-普朗克方

程(6.1.14)的渐近解．最重要的是要记住，按(6.1.12)式，ϕ 可以是 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$，按(6.1.16)式与(6.1.23)式，$\frac{\partial a}{\partial \sigma}$ 可以是 $O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$，且 $\nabla_r a$ 可以是 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$．换句话说，$\phi$ 可以是（适当）大的，而且 a 可以有(适当的)边界层．

运用(6.1.11)，(6.1.12)和(6.1.16)式，可以把(6.1.24)式写成

$$\psi \sim e^{-mv^2/2kT} p(\mathbf{x},\ t)\left(\frac{1}{l^3 v_0^3}\right), \tag{6.1.26}$$

式中

$$p(\mathbf{x},\ t) = e^{[-(m/kT)]\Phi(\mathbf{x})} a\left(\frac{1}{l}\mathbf{x},\ \frac{v_0^2}{\beta l^2} t\right) l^3 v_0^3. \tag{6.1.27}$$

故运用(6.1.25)与(6.1.27)式，能够证明 p 满足斯莫路苏斯基-克拉美方程

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{kT}{m} \Delta_x p + \nabla_x (p \cdot \nabla_x \Phi) \tag{6.1.28}$$

$$p(\mathbf{x},\ \xi,\ 0) = \delta(\mathbf{x} - \xi). \tag{6.1.29}$$

此外，(6.1.13)与(6.1.26)式蕴涵着

$$P(\mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \xi,\ \eta,\ t) \sim \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} p(\mathbf{x},\ \xi,\ t). \tag{6.1.30}$$

概括起来，这一节我们已经从福克尔-普朗克方程(6.1.14)推导出斯莫路苏斯基-克拉美方程(6.1.28)．与此同时，已经证明了如果解的位势与空间导数相当大时，斯莫路苏斯基-克拉美方程仍然成立．我们没有从福克尔-普朗克方程的初始条件出发去推导初始条件(6.1.29)，但是我们已注意到它可以用(6.1.14)式的渐近"初始层"的分析和初始条件，当 $t \downarrow 0$ 时

$$P(\mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \xi,\ \eta,\ t) \to \delta(\mathbf{x} - \xi,\ \mathbf{y} - \eta)$$

推导出来[55,54].

方程(6.1.28)是随机微分方程 (6.1.5) 的解的转移概率密度的福克尔-普朗克方程。

习题 6.1.1

写出布朗正弦波发生器的斯莫路苏斯基方程.解这个方程并计算位移与速度的均值与方差. 与习题 2.1.6 中的那些结果比较。

习题 6.1.2

在电磁场中考虑带电荷的布朗质点的朗之万方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{y}$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=-\beta\mathbf{y}+\mathbf{K}(\mathbf{x})-\mathbf{H}(\mathbf{x})\times\mathbf{y}+\sqrt{\frac{2\beta KT}{m}}\frac{d\mathbf{w}}{dt},$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{K}(\mathbf{x})=(K_1(\mathbf{x}), K_2(\mathbf{x}), K_3(\mathbf{x}))^T$. $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 是磁场,而 $\times$ 表示向量积. 导出斯莫路苏斯基-克拉美方程.

习题 6.1.3

把福克尔-普朗克方程的渐近分析推广到下面的迁移方程上去:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=y\frac{\partial u}{\partial x}+(K(x)-\beta y)\frac{\partial u}{\partial y}+qLu,$$

其中 L 是作用在变量 y 上的算子,$q=q(\beta)$ 是参数. 求分别当 (i)$\beta\to\infty$, (ii)$t\to\infty$, (iii)当$\beta\to\infty$时,$t=\tau(\beta)$(运用适当的尺度!)$\to s$时,$u(x, y, t\beta)\to u_0(x, s)$的条件. 函数 $u_0(x, s)$ 为某个合适的斯莫路苏斯基方程的解.

习题 6.1.4

考虑一维扩散的哥德斯坦因(Goldstein)模型. 质点是沿 x 轴分布,并且以固定速度 α 向右或者向左移动作弹性碰撞. 速度过程$\{y(t), t\geq 0\}$是一在碰撞之间的平均时间 $=\frac{1}{\beta}$, $\beta>0$意义下, 取值为 $\pm\alpha$. 的过程由于碰撞之间的时间服从指数分布的,所以速度过程 $y(t)$ 的转移概率为

$$P(y(t+s)=\pm\alpha|y(s)=\pm\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+e^{-2\beta t} & 1-e^{-2\beta t}\\ 1-e^{-2\beta t} & 1+e^{-2\beta t}\end{pmatrix}\to\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \text{当}\ t\to\infty.\quad(6.1.31)$$

位移过程 $x(t)$ 满足 $\frac{dx}{dt}=y(t)$, $x(0)=x$, 而且 $(x(t), y(t))$是一个马尔可夫过程. 令

$$\mathbf{u}(t, x, y)=E_{x,y}\mathbf{f}(x(t), \mathbf{y}(t)),$$

其中 $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}$, $x=x(0)$. 运用(6.1.31)式, 得到

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=y\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}+\mathbf{A}\mathbf{u},$$

其中 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u(t, x, \alpha)\\ u(t, x, -\alpha)\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{A}=\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

当碰撞速度剧增时, 其极限能够按尺度 $s=\varepsilon^{-2}t$, $y^{\varepsilon}(t)=y(t/\varepsilon^2)$ 而求得. 我们得到

$$\frac{dx^{\varepsilon}(t)}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}y^{\varepsilon}(t)$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial s}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{A}\mathbf{u}^{\varepsilon}$$

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(0, x, y)=\mathbf{f}(x, y),$$

其中 $\mathbf{u}^{\varepsilon}(t, x, y)=E_{x,y}\mathbf{f}(x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t))$.

向量 $\mathbf{f}(x, y)$ 有分量 $f_+(x)=f(x, \alpha)$ 和 $f_-(x)=f(x, -\alpha)$. 为避免初始层假设 $f_+=f_-=f$. 记

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_+\\ u_-\end{pmatrix}=\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u_+\\ u_-\end{pmatrix}+\frac{1}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix}-\beta & \beta\\ \beta & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_+\\ u_-\end{pmatrix},$$

$\mathbf{u}(0, x)=f_{\pm}(x)$. 证明 $w=u_++u_-$ 满足方程

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\beta\frac{\partial w}{\partial t},$$

$$w(0, x)=2f(x),\quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, x)=0$$

(这是电报方程). 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 运用上面的展开式, 取

$$\mathfrak{L}_1=A,\ \mathfrak{L}_2=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\mathfrak{L}_1^{-1}=\frac{1}{4\beta}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\quad -P\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1^{-1}\mathfrak{L}_2P=\frac{\alpha^2}{4\beta}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

其中 P 是到 $\mathfrak{L}_1$ 的零空间上的投影，即

$$P=\lim_{t\to\infty}e^{\mathfrak{L}_1 t}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

从而证明

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_0(t,\ x)}{\partial t}=\frac{\alpha^2}{4\beta}\frac{\partial^2 u_0(t,\ x)}{\partial x^2}\\ &u_0(0,\ x)=f(x).\end{aligned}\tag{6.1.32}$$

方程 (6.1.32) 是一维扩散方程，其扩散系数$=\alpha^2/4\beta$，这里 $\alpha=$质点的速度，而 $\beta=$碰撞之间的平均时间[78]。▌

习题 6.1.5*

考虑线性迁移方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}u+\nabla^{\mathbf{y}}\cdot\frac{1}{m}Fu=Lu+S.$$

这里 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ 是空间变量，$\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^T$ 是速度向量，而 $u(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)$ 是相空间中质点的浓度。

$$\mathbf{F}=\mathbf{G}(\mathbf{x},\ t)+e\,\mathbf{E}(\mathbf{x},\ t)+\frac{e}{c}\,\mathbf{y}\times\mathbf{B}(\mathbf{x},\ t)$$

表示作用在系统上的外力；$\mathbf{G}$，$\mathbf{E}$，和 $\mathbf{B}$ 分别表示重力、电力和磁力．常数 m 是稀薄质点的质量，用 $S(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)$ 表示来源项，即稀薄质点瞬时射到相空间中的一体积元中的浓度．L 是算子，它决定了气体与介质之间的碰撞．在对迁移方程作无量纲化后，假设气体(例如中子)与介质碰撞之间的平均自由轨道与平均自由时间是很小的 [即 $x\to\varepsilon x$ 和 $t\to\varepsilon^2 t(\varepsilon\ll 1)$]．令 $\varepsilon\mathbf{w}(\mathbf{x},\ t)$ 是介质的相对小速度，使得 $\mathbf{y}\to\mathbf{y}-\varepsilon\mathbf{w}(\mathbf{x},\ t)$(新的 $\mathbf{x}$)．作代换：$\mathbf{E}+\mathbf{G}\to\varepsilon\mathbf{E}$，$\mathbf{B}\to\mathbf{B}$，$S\to\varepsilon^2 S$，$Lu\to Lu^\varepsilon$，这里 u^ε 是相对新变量的密度．可得到迁移方程

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}+\nabla_x(\varepsilon\mathbf{y}+\varepsilon^2\mathbf{w})u+\nabla_{\mathbf{y}}\Big[&\mathbf{y}\times\mathbf{B}+\varepsilon(\mathbf{E}+\mathbf{w}\times\mathbf{B})\\ &-\varepsilon^2(\mathbf{y}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{w})-\varepsilon^3\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{w}\right)\Big]u=Lu+\varepsilon^2 S.\end{aligned}$$

取 L 为 $L=L_0+\varepsilon^2 L_2$，其中

$$L_0 u(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)=\int \eta\sigma_n^s(\mathbf{x},\ \eta,\ \mathbf{y},\ t)u(\mathbf{x},\ \eta,\ t)d\eta$$

$$-\sigma_n^T(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)u(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)\quad (n=0,\ 2).$$

假设 0 是 L_0 的特征值，即存在函数 $\phi=\phi(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)$ 使得 $L_0\phi=0$，和 $1=\int\phi\, d\mathbf{y}=4\pi\int|\mathbf{y}|^2\phi d|\mathbf{y}|$.（注意在斯莫路苏斯基逼近中 ϕ 是麦克斯韦型的.）假设 $\phi=\phi(|\mathbf{y}|)$，L_0 是质点守恒的，即对 L_0 的定义域中的一切 f 有 $\int(L_0 f)dy=0$（所以 $\Phi^*=1$ 是 L_0^* 的特征函数）。证明 0 是算子 $T=L_0-\mathbf{y}\times\mathbf{B}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}$ 的特征值，而 ϕ 与 $\phi^*=1$ 分别为 T 与 T^* 的特征函数. 假设 0 是 T 的孤立特征值，而且对一切 $\mathbf{B}$，$\mathrm{spec}(T)\subset\{\mathrm{Re}\,\lambda<\gamma<0\}$[注]. 若 $g(y)\perp\phi^*$，，且当 $\int T^{-1}g\,dy=0$ 时，$T^{-1}g$ 是唯一的. 假设

$$\sigma_0^s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}P_n\left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|},\ \frac{\eta}{|\eta|}\right)f_n(\mathbf{x},\ \eta,\ \mathbf{y},\ t),$$

这里 P_n 是勒让德多项式. 证明 L_0 保持形如

$$\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\cdot\mathbf{H}(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t)$$

的纯量函数空间不变.

令 $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\varepsilon^n$ 则得到

$$u_0=A_0(\mathbf{x},\ t)\phi(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t)$$

$$u_1=A_1(\mathbf{x},\ t)\phi(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t)+\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\cdot\psi(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t),$$

其中

$$\begin{aligned}&\psi=(|\mathbf{B}|^2+K^2)^{-1}[K\mathbf{h}+\mathbf{B}(\mathbf{B}\cdot K^{-1}\mathbf{h})+\mathbf{B}\times\mathbf{h}],\\&\mathbf{h}=(|\mathbf{y}|\phi)\nabla_{\mathbf{x}}A_0+\left[\ |\mathbf{y}|\nabla_{\mathbf{x}}\phi+(\mathbf{E}+\mathbf{w}\times\mathbf{B})\left(\frac{\partial}{\partial|\mathbf{y}|}\phi\right)\right]A_0,\end{aligned}\tag{6.1.33}$$

而 K 由下式定义:

$$L_0\left[\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\cdot\mathbf{H}(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t)\right]=\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\cdot(K\mathbf{H})(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t)$$

（注意 $K\psi-\mathbf{B}\times\psi=\mathbf{h}$）. 证明 u_2 的可解性条件是

[注] spec 指谱——译者注

$$\frac{\partial A_0}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{4\pi}{3}\int|\mathbf{y}|^3\psi d|\mathbf{y}|+\mathbf{w}A_0\right)=\sigma A_0+S_0, \qquad (6.1.34)$$

这里
$$S_0(x,\ t)=\int S(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)d\mathbf{y}$$
$$\sigma(\mathbf{x},\ t)=\int(L_2\phi)(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)d\mathbf{y}.$$

把(6.1.34)式改写成
$$\frac{\partial}{\partial t}A_0+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot A_0\boldsymbol{\omega}=\sigma A_0+S_0,$$

这里
$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{M}(|\mathbf{y}|\phi\cdot\nabla\ln A_0)+\mathbf{M}(|\mathbf{y}|\nabla_{\mathbf{x}}\phi)$$
$$+\mathbf{M}\left(\frac{\partial}{\partial|\mathbf{y}|}\phi\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{w}\times\mathbf{B})\right)+\mathbf{w},$$

其中 $\mathbf{M}$ 是张量算子：
$$\mathbf{M}(\cdot)=\frac{4\pi}{3}\int|\mathbf{y}|^3(|\mathbf{B}|^2+K^2)^{-1}(IK+\mathbf{B}\mathbf{B}^TK^{-1}+\mathbf{B}\times\mathbf{I})(\cdot)d|\mathbf{y}|,$$

这里 $\mathbf{B}\times\mathbf{I}(\mathbf{f})=\mathbf{B}\times\mathbf{f}$.

考虑下面的情况：

(i) $\sigma=0$(质点守恒)。

(ii) 假设 ϕ 是麦克斯韦型的：
$$\phi=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-m|\mathbf{y}|^2/2kT}$$

(并且分析由 $\boldsymbol{\omega}$ 产生的偏移项.)

(iii) 考虑 $\mathbf{B}=0$ 的情况 $\left[得到\ \mathbf{M}(\cdot)=\left(\frac{4\pi}{3}\right)\int I|\mathbf{y}|^3K^{-1}(\cdot)d|\mathbf{y}|\right]$.

(iv) $\mathbf{B}\to\infty$, $\mathbf{B}=|\mathbf{B}|\mathbf{e}\left[得到\ \mathbf{M}(\cdot)=\left(\frac{4\pi}{3}\right)\int\mathbf{e}\mathbf{e}^T|\mathbf{y}|^3K^{-1}(\cdot)d|\mathbf{y}|\right]$.

(v) 假设散射是各向同性的，即 $\sigma_0^s=\sigma_0^T(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t)$，等等. 证明
$$K\mathbf{h}=-|\mathbf{y}|\sigma_0^T(\mathbf{x},\ |\mathbf{y}|,\ t)\mathbf{h}(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)$$

并构造 K^{-1} 和 $(|\mathbf{B}|^2+K^2)^{-1}$[68].

习题 6.1.6

考虑作用在布朗运动上的重力效应并解释沉淀现象，即解释质点浓度随高度函数的变化的现象. 运用斯莫路苏斯基逼近推导出关于位移的近似朗之万方程：

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\mathbf{K}(\mathbf{x})+\sqrt{\frac{2kT}{m}}\frac{dw(s)}{ds},\ s=\beta t\quad \mathbf{x}=(x,\ y,\ z)^T.$$

令
$$\mathbf{K}=\left(0,\ 0,\ -\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right)^T g,$$

这里 ρ_0 是周围液体的密度，ρ 是布朗质点的浓度($\rho\geqslant\rho_0$). 令 w 是对应的福克尔-普朗克方程的解.

(i) 证明 $\mathbf{j}=(w\mathbf{K}+D\nabla w)$是扩散流$\left(D=\dfrac{kT}{m\beta}\right)$.

(ii) 忽略在 x, y 方向上的扩散，导出

$$\frac{\partial w}{\partial t}=D\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+c\frac{\partial w}{\partial z},\tag{6.1.35}$$

$$c=\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)g,$$

证明对这个问题的初始与边界条件是

$$D\frac{\partial w}{\partial z}+cw=0\quad 和\quad w\to\delta(z-z_0),\tag{6.1.36}$$

在 $z=0$ 处，$t>0$ (在底部).

(iii) 令 $\quad w=U(z,\ t)\exp\left\{-\left[\dfrac{c}{2D}(z-z_0)+\dfrac{c^2}{4D}t\right]\right\}$

解(6.1.35)式. 证明 $\lim\limits_{t\to\infty}w(z,\ t,\ z_0)=\left(\dfrac{c}{D}\right)e^{-cz/D}$, 即，平衡解表示等温大气定律[31]，用图解法说明解的特性，并画出 $w(z,\ t,\ 0)$ 的图线.

(iv) 证明 $\qquad Ez=\dfrac{D}{c}=\dfrac{kT}{mg}\,\dfrac{\rho}{\rho-\rho_0}$,

即是等效均匀大气的高度.

(v) 为什么状态 $z=0$ 不是最小能量状态? 试说明最初在 $z=0$ 的质点将不在那里停留，特别

$$w(z,\ t,\ 0)=\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}e^{-(z+ct)^2/2Dt}$$
$$+\frac{c}{D\sqrt{\pi}}e^{-cz/D}\int_{z-(t)/2\sqrt{Dt}}^{\infty}e^{-x^2}dx\to\frac{c}{D}e^{-cz/D}.$$

所以质点为了抵消周围液体的内能，要做一定量的功，这与热力学第二定律相矛盾!

(vi) 证明为此而做的平均功为

$$EA = \frac{kT}{质点数}.$$

所以按平均来说，熵的递减量为 k/质点数.

$$ES = S_{max} - Nk,$$

这里 N 表示布朗质点的数目. 能否用这个功来驱动一个热机，而且，使它的效率比卡诺循环更高？

在 $t \leqslant D/c$ 和 $t \geqslant D/c$ 时，考虑质点的熵以及质点的总熵.

习题 6.1.7

证明：具有扩散系数 D_1, D_2 的两个相互独立的布朗运动质点之间的相对位移也遵循布朗运动的定律，其扩散系数为 $D_{12} = D_1 + D_2$.

习题 6.1.8

假设在空间中固定的一个质点，处于伸向无限远的介质中，而在介质中大量类似的布朗运动质点在时间 $t=0$ 时是均匀分布的。更确切地说，假设盛有气体的容器的体积为 $V (V \to \infty)$，N 为容器中布朗运动质点数目时，$N/V \to \nu$. 假设静质点被半径为 R 的影响球面包围着，那就是，任一质点跑到与静质点的距离 R 之内时都会被吸收到球内. 试计算质点到达半径为 R 的包围静质点的球面上的比率？令 ν 是在时间 $t=0$ 时，质点在 $|r| = R$ 外的平均浓度.

[答：$4\pi DR\nu(1 + R/\sqrt{\pi Dt}$][83].

6.2 扩散逼近马尔可夫链：在遗传学中的应用

布朗运动可用一个改变尺度的随机游动的极限来构造，这种构造可以推广到一类马尔可夫链. 假设在实线上对每个 N，给定一个马尔可夫链 $X_N(t_n^N)$. 更准确地说，令 x_N^1, x_N^2, …是马尔可夫链的可能状态，而且

$$P[X_N(t_n^N) = x_N^j \mid X_N(t_{n-1}^N) = x_N^i] = p_{ij}^N(n),$$

其中 $$t_1^N < t_2^N < \cdots.$$

假设当 $N\to\infty$ 时，

$$\max_n \Delta_N t_n \equiv \max_n (t_{n+1}^N - t_n^N) \to 0.$$

令 $$x_N(t) = x_N(t_n^N), \quad 对\ t_n^N \leqslant t < t_{n+1}^N$$

我们定义了 $x_N(t_n^N)$ 的一个分段常数插值。

假设当 $N\to\infty$ 时，$\Delta t = \Delta t(N) \to 0$，则

$$\frac{1}{\Delta t} E_{x,t}[x_N(t+\Delta t) - x_N(t)] \to a(x, t)$$

$$\frac{1}{\Delta t} E_{x,t}[x_N(t+\Delta t) - x_N(t)]^2 \to b(x, t)$$

和 $$\frac{1}{\Delta t} e_{x,t}[x_N(t+\Delta t) - x_N(t)]^{2+\delta} \to 0.$$

此外还假定收敛速率充分快，说得更明确些，设

$$E_{x,t}[x_N(t+\Delta t) - x_N(t)] = a_N(x, t)\Delta t$$

$$E_{x,t}[x_N(t+\Delta t) - x_N(t)]^2 = b_N(x, t)\Delta t,$$

即假定当 $N\to\infty$ 时

$$\int_0^T \Delta t^{(1/2)+\alpha} \left| \frac{x_N(t+\Delta t) - x_N(t)}{\Delta t} - a_N(x_N(t), t) \right|^2 dt \to 0$$

和

$$\int_0^T |a_N(x_N(t), t) - a(x_N(t), t) + \sqrt{b_N(x_N(t), t)} - \sqrt{b(x_N(t), t)}\,|^2 dt \to 0.$$

此外，假设 $a(x, t)$ 与 $\sqrt{b(x, t)}$ 是 $R\times[0, T]$ 中的有界连续函数，而且 $a_N(x, t)$ 与 $b_N(x, t)$ 是有界函数．若随机微分方程

$$dx(t) = a(x(t), t)dt + \sqrt{b(x(t), t)}\,dw(t)$$

有唯一解，则在弱意义下，当 $N\to\infty$ 时，$x_N(t)\to x(t)$，即，对每一个连续函数 f，当 $N\to\infty$ 时，有

$$E_x f(x_N(t)) \to E_x f(x(t)).$$

[证明见文献[48]]．例如考虑 Wright-Fisher 模型[19]．令两个基因 A 与 a 决定群体中的一个遗传类型．它的三种可能的基因型设为 AA，aa，与 Aa．此外，我们假设再生细胞，或配子只有一个基因，这样基因型 AA 或 aa 的有机体的配子，分别具有基因 A 或 a，而 Aa 的一个有机体的配子可以等概率地具有基因 A 或 a．在贝努利设计的条件下，一个后代从每个母体中接受一个基因．更确切地说，N 个后代的基因型结构，是从类型 A 和 a 的 $2N$ 个基因的集合中独立地抽取 $2N$ 个的结果．现在假定所考虑的群体是由每一代 N 个个体组成．这可以在每一代中按用适当方法选择有机体来达到．如果在某一代，有 i 个基因是属于 A 型($0\leqslant i\leqslant 2N$)，则称这一代处于状态 E_i．很清楚，这样一个遗传过程是一个具有 $2N+1$ 个状态 $E_0, E_1, \cdots, E_{2N}$．的马尔可夫链．在一次遗传中，从 E_i 到 E_j 的转移概率等于：

$$P_{ij}^N=\binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}. \qquad (6.2.1)$$

另一种说法，我们可以考虑一个群体，其第 n 代由 $X_N(n)=i$ 个个体是 A 型的 N 个个体组成．下一代是由上一代可能产生的无限个后代中随机地选择 N 个个体组成的．例如，对一鱼塘而言，就是这种情况．选择过程是对 A 型具有概率 $x=i/N$ 型的二项型，我们认为作出这个假设是合理的，因为 A 型的比例 i/N 等于它在大量后代群体中的概率．转移概率为

$$P_{ij}^N=P(X_N(n+1)=j\,|\,X_N(n)=i)=\binom{N}{j}x^j(1-x)^{N-j}.$$

如果选择外力作用在群体上，令 s 表示 A 相对于 a 的合理性，即

$$P_{ij}^N=\binom{N}{j}x^{*j}(1-x^*)^{N-j},$$

其中 $\quad \dfrac{x^*}{1-x^*}=(1+s)\dfrac{x}{1-x}$ 或 $x^*=\dfrac{(1+s)x}{1+sx}$.

若 $s=s_N(n)$ 是一个随机变量，则我们感兴趣的量，例如一个基因型的灭绝的概率，直至灭绝的时间，全 A 群体等就变得很难计算了. 在这种情况下，用扩散过程或者更精确地说用随机微分方程的解来逼近马尔可夫链 $\{X(n)\}$. 为此用

$$x_N(t)=\frac{x_N([Nt])}{N}$$

改变过程的尺度，这里 $[Nt]$ 是不超过 Nt 的最大整数，t 是任意正数. 这样 $x_N(t)$ 表示群体中 A 型的比例. 假设当 $N\to\infty$ 时，$n=[Nt]$

$$NEs_N(n)\to\sigma(t)$$

$$NEs_N^2(n)\to v(t) \quad \text{和} \quad NEs_N^k(n)\to 0 \quad \text{对一切 } k>2.$$

设 $\Delta t=\dfrac{1}{N}$, 得到

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{1}{\Delta t}E_{x,t}[x_N(t+\Delta t)-x_N(t)] \\ &= E[X_N([Nt]+1)-X_N([Nt])\mid X_N([Nt])=xN]. \end{aligned}$$

因为 $X_N(n)$ 是 $B(N, x_N^*)$, 我们有(参看第一章)

$$\begin{aligned} a_N &= NE_x(x^*-x) \\ &= NE_x\left(\frac{(1+s_N(n))x}{1+s_N(n)x}-x\right) \\ &\to[\sigma(t)-v(t)x]x(1-x)\equiv a(x, t), \quad (6.2.2) \end{aligned}$$

而且，类似地有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t}E_{x,t}[x_N(t+\Delta t)-x_N(t)]^2 \\ &\quad\to x(1-x)[1+v(t)x(1-x)]\equiv b(x, t). \quad (6.2.3) \end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时，诸高阶矩都趋向于 0.

为了证明收敛速率充分快，以便满足本节一开始提出的收敛条件我们再次考虑 Wright-Fisher 模型．我们有

$$E[x_N(t+\Delta t)-x_N(t)\,|\,x_N(t)]=0$$

和 $$E[|x_N(t+\Delta t)-x_N(t)|^2|x_N(t)]=\frac{x_N(t)[1-x_N(t)]}{N},$$

$$E[|x_N(t+\Delta t)-x_N(t)|^4|x_N(t)]\leqslant\frac{K}{N^2},$$

这里 K 是常数．现在容易看出，假如随机微分方程

$$dx(t)=a(x,\ t)dt+\sqrt{b(x,\ t)}\,dw(t),\qquad (6.2.4)$$

$$x(0)=x$$

有唯一解(在 $x=0$ 和 $x=1$ 具有吸收)，则收敛条件成立．注意，(6.2.4) 式中的系数 $\sqrt{b(x,\ t)}$ 不满足存在性和唯一性定理的条件．为了证明存在性和唯一性，在区间 $I_\varepsilon=[\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$ 中考虑 (6.2.4)式，且在 I_ε 的边界 ∂I 上为吸收．在 I_ε 中，存在性和唯一性定理的条件是成立的，因此，直到时间

$$\tau_\varepsilon=\inf\{t\,|\,x_\varepsilon(t)\in\partial I_\varepsilon\}$$

在 I_ε 中有唯一解 $x_\varepsilon(t)$．按局部化原理 (参看习题 4.2.3*)，若 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，则 $\tau_{\varepsilon_1}\geqslant\tau_{\varepsilon_2}$，且

$$x_{\varepsilon_1}(t)=x_{\varepsilon_2}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau_{\varepsilon_2}.$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，我们看到 $x_\varepsilon(t)$ 收敛于极限 $x(t)$ 和 $\tau_\varepsilon\to\tau$，这里 τ 是 $x(t)$ 的吸收时间．

由此得出 $x_N(t)\to x(t)$，这里 $x(t)$ 是随机微分方程

$$dx(t)=a(x,\ t)dt+\sqrt{b(x,\ t)}\,dw(t)$$

的解，在 $x=0$ 和 $x=1$ 具有吸收边界．很明显一旦一个基因型灭绝，对所有未来的下一代，除非出现突变否则将永远为灭绝．这样，灭绝的概率是 $x(t)$ 从区间(0, 1)中离出的概率．

习题 6.2.1

对 $|s_N(n)|<1$，根据泰勒级数展开式；对 $|s_N(n)|\geqslant 1$，运用切比晓夫不等式，证明(6.2.2)和(6.2.3)式[66]。

习题 6.2.2

证明若类型 AA，Aa 与 aa 的相对选择强度分别为 $[1+s_N^1(n)]:1:[1+s_N^2(n)]$ 时，其偏移系数为

$$a(x,\ t)=x(1-x)[\sigma_1(t)-\sigma_2(t)-v_1(t)x+v_2(t)(1-x)\\ +2(x-1)r(t)],$$

而扩散系数为

$$b(x,\ t)=x(1-x)[1+x(1-x)(v_1+v_2-2r)],$$

其中
$$Es_N^i(n)\sim\frac{\sigma_i(t)}{N},\quad E[S_N^i(n)]^2\sim\frac{v_i(t)}{N},$$

$$Es_N^1(n)s_N^2(n)\sim\frac{r(t)}{N},\quad E|s_N^i(n)|^k=0\left(\frac{1}{N}\right),$$

对一切 $k>2$ 和 $n=[Nt]$。

习题 6.2.3

假设在 Wright-Fisher 模型中出现突变，从 A 到 a 的突变速率为 α_1，从 a 到 A 的突变速率为 α_2。更准确些，x 用下式代替：

$$x'=-x\alpha_1+(1-x)\alpha_2 \quad 和 \quad x^*=\frac{(1+s)x'}{1+sx'}.$$

为简单起见假设 s_N 是确定的，且当 $N\to\infty$ 时

$$Ns_N\to\sigma,\quad N\alpha_i\to\gamma_i\quad (i=1,\ 2).$$

证明 $a(x)=\sigma x(1-x)-\gamma_1x+\gamma_2(1-x)$；$b(x)=x(1-x)$。

习题 6.2.4

证明下列退化后向抛物型边值问题有唯一有界解：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}b(x,\ t)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-1 \tag{6.2.5}$$

$$u(0, t)=u(1, t)=0.$$

(提示：证明在区间 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上使得 $u_\varepsilon(x, t)=u(1-\varepsilon, t)=0$ 的(6.2.5)式的解 $u_\varepsilon(x, t)$ 收敛于极限 $u(x, t)$，并且估计收敛的速率)[67,80]。

习题 6.2.5

根据习题 6.2.4，证明一个基因型的灭绝将在有限时间内出现的概率为 1. 写出灭绝概率 $u(x, t)=P(a$ 将灭绝 $|A$ 的比例在时间 t 是 $x)$ 所满足的微分方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial s}+Lu=0,\ s\geqslant t,\ u(0, s)=0,\ u(1, s)=1. \qquad (6.2.6)$$

在时齐的情况下解(6.2.5)式与(6.2.6)式. 用这些解估计灭绝的概率和灭绝的期望时间：

$$E_{i,n_0}\tilde{n}_N=E(\tilde{n}\,|\,X_N(n_0)=i)\approx Nu(x, t),$$

这里 $u(x, t)$ 是(6.2.5)式的解，$\tilde{n}_N$ 是直至灭绝时基因型遗传的代数，n_0 是最初一代的数目，$t=n_0/N$，$x=i/N$. 问这一逼近好到什么程度？与不加选择的 Wright-Fisher 模型比较.

习题 6.2.6

证明全 A 群体可以由下式逼近：

$$v(x, t)=N^2E_{x,t}\int_t^{\tau_x}x(s)\,ds,$$

这里 $\tau_x=\inf\{s\geqslant t\,|\,x(s)=0$ 或 $x(s)=1,\ x(t)=x\}$，并且证明 $v(x, t)$ 是方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+Lv=-N^2x,\ v(0, t)=v(1, t)=0$$

的解.

习题 6.2.7

假定选择按指数律衰减，即 $\sigma(t)=\sigma e^{-\alpha t}$，又令 $v(t)=0$，即 $a(x, t)=\sigma e^{-\alpha t}x(1-x)$ 和 $b(x, t)=x(1-x)$. 导出下列关于期望离出时间 $w(x, t)$ [$w(x, t)$ 是(6.2.5)式的解]的展开式

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) e^{-n\alpha t}, \qquad (6.2.7)$$

其中 $$\frac{1}{2} x(1-x)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -1,\ w_0(0) = w_0(1) = 0,$$

即，$w_0(x) = -2[x\ln x + (1-x)\ln(1-x)]$

和 $$\frac{1}{2} x(1-x)\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \alpha n w_n(x) = -x(1-x)\frac{\partial w_{n-1}(x)}{\partial x}$$

$$w_n(0) = w_n(1) = 0.$$

证明 $$\int_0^1 w_n^2(x)dx \leqslant \frac{C^n}{n!}$$

其中 C = 常数，所以级数 (6.2.7) 式对 $t \geqslant 0$ 一致收敛．证明若 $\sigma(t) = \frac{\sigma}{1+t}$，则渐近级数

$$w(x, t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) t^{-n} \quad (t \gg 1)$$

不收敛．计算 $w_n(x)$，并证明当 $t \to \infty$ 时，

$$\left| w(x, t) - \sum_{n=0}^{m} w_n(x) t^{-n} \right| = O(t^{-(m+1)}).$$

习题 6.2.8

证明：如果限制过程在区间的右端点上离出，我们可得到与上述具有相同系数 $b(x)$ 的一个扩散过程，但其偏移系数修改为

$$a^*(x) = a(x) + \frac{b(x)u'(x)}{u(x)},$$

其中 $u(x)$ 是在右端点上离出的概率[18]．

习题 6.2.9*

阅读 Feller 的论文[20, 21] 与 Mandl 的著作[66]．

习题 6.2.10

考虑由 a 型与 A 型之间增殖差别所发生的选择优势的情形．令 α 与 β 表示正实数，群体的大小固定为 n，假定在当今一代中存在着 j 个 a 型的配子和 $n-j$ 个 A 型配子，并定义 $p_j = \frac{j}{n}$．令转移概率矩阵为

$$P_{ij}=\binom{n}{j}\tilde{p}_i^j(1-\tilde{p}_i)^{n-j},$$

这里 $\tilde{p}_j$ 定义为

$$\tilde{p}_j=p_j+\frac{f_n(p_j)}{n}$$

和
$$f_n(p)=\frac{\beta pq(\alpha(p-q)+q)}{1-\beta q(2\alpha p+q)/n}, \quad q=1-p.$$

参数 α 与 β 通常表示增殖差别．求逼近的随机微分方程并证明收敛条件是满足的[14]。

第七章　离出问题和奇异摄动

7.1　在一流场中的小扩散

在动态系统上，甚至非常小的随机摄(扰)动在充分长的时间以后的累积效应是值得重视的．例如，即使对应的确定型系统有一个渐近稳定的平衡点，随机效应能引起系统的轨道以概率1离开任意有界区域(见第5.4节)．在(确定型)动态系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{b}(\mathbf{x}) \tag{7.1.1}$$

上考虑白噪声型的小随机摄动的效应．于是向量 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_n)^T$ 变成随机过程 $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$，它满足伊藤随机微分方程

$$d\mathbf{x}_\varepsilon=\mathbf{b}(\mathbf{x}_\varepsilon)dt+\varepsilon\sigma d\mathbf{w}(t), \tag{7.1.2}$$

这里 $\mathbf{w}(t)$ 是 n-维布朗运动，$\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 是向量场，$\sigma(\mathbf{x})$ 是扩散矩阵，而 $\varepsilon\neq 0$ 是小的实参数．这一章中我们将研究下面的问题，这个问题最初是由柯尔莫哥洛夫提出的，即求下述各值按 ε 的渐近展开：(i) 在一个区域的边界上的点的概率分布，其中摄动系统的轨线首次离出；(ii) 期望离出时间．为了说明这些问题的实质，把随机摄动看成为确定流场中质点的缓慢扩散是很方便的．当然，其结果将依赖于基础流场的特征．根据质点的是扩散性，我们将区分三种情况：(a)顺流，(b) 越流，或 (c)逆流(见图7.1.1)．如第四章中描述的那样，我们把这个问题与某个奇异摄动椭圆型边值问题的解联系起来．

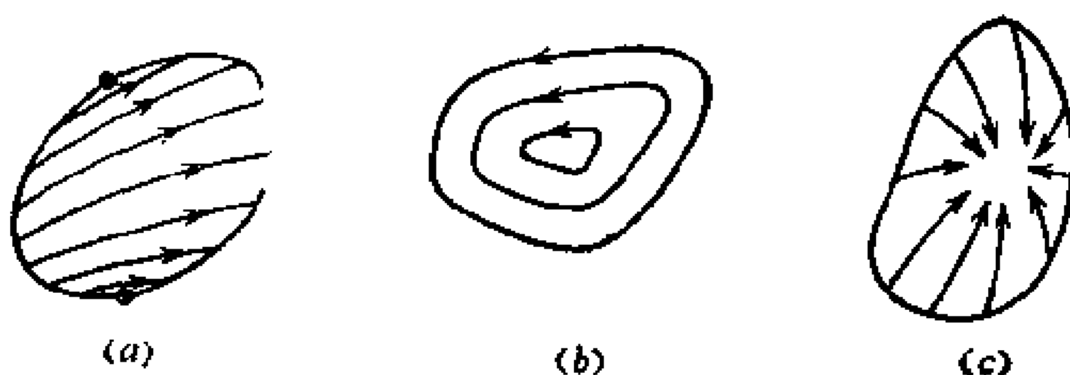


图7.1.1 流场

7.2 顺流扩散和具有反射的扩散

令 Ω 是 R^n 中的一个区域，并且假设向量场 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 的流线穿越 Ω(图7.1.1a)．更确切地说，令 $\mathbf{x}(t)$ 是 (7.1.1) 式的解，而且 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}\in\Omega$. 假定对某个有限的 $t_1>0$ 和 $t_2\geqslant 0$, $x(t_i)\in\partial\Omega(i=1, 2)$．令 $\sigma(\mathbf{x})$ 是 $\overline{\Omega}$ 中的非奇异扩散矩阵，并设

$$a_{ij}(x)=\frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}\sigma_{kj}.$$

为简单起见假定 $a_{ij}=\delta_{ij}$．令 $u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ 是边值问题的解：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=\varepsilon^2\Delta u_\varepsilon+b(\mathbf{x})\cdot\nabla u_\varepsilon=0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \qquad (7.2.1)$$
$$u_\varepsilon(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}), \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

这里 $f(\mathbf{x})$ 是 $\partial\Omega$ 上的光滑函数 [参见 (5.4.8) 式]．于是按 (5.4.9)式有

$$u_\varepsilon(\mathbf{x})=E_\mathbf{x}f(\mathbf{x}_\varepsilon(\tau))=\int_{\partial\Omega}p_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})dS_y.$$

直观上看是清楚的，如果 $\mathbf{x}_\varepsilon(0)=\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}\in\Omega$, 当随机摆动很小时，$\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ 偏离确定轨线 $\mathbf{x}(t)$ 也是很小的．因此扩散质点将随流一起于流的离出点附近离出区域．令 $\mathbf{y}(\mathbf{x})$是当 t 增加时，(7.1.1)式的轨线 $\mathbf{x}(t)$ 离出 Ω 的点．那么当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \to \delta(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$$
$$(\mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{y} \in \partial\Omega).$$

所以(7.2.1)式的解 $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ 将收敛于

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \delta(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dS_y = f(\mathbf{y}(\mathbf{x})). \quad (7.2.2)$$

公式(7.2.2)蕴涵着 $u(\mathbf{x})$ 是下列简化方程

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u = 0, \quad 在\ \Omega\ 中, \quad (7.2.3)$$
$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad 在\ \partial\Omega_1\ 上$$

的解，这里 $\partial\Omega_1$ 是 $\partial\Omega$ 上(7.1.1) 式的轨线离出 Ω 的那一部分．事实上，(7.2.3)式能够写成

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t)) = 0, \quad (7.2.4)$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 是 (7.1.1) 式的一个解．所以在特征曲线 $\mathbf{x}(t)$ 上 $u(\mathbf{x}(t))$ 是常数，而且它的值是 $f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$．一个更精确的数学处理是建立在对 (7.2.1) 式的边界层方法与渐近展开式的方法的基础上(射线方法)．由于简化方程 (7.2.3) 是一阶的，因此边界条件仅加在每一个特征曲线的一个端点上．狄里克莱问题(7.2.1)的解 $u_\varepsilon(\mathbf{x})$在整个 $\partial\Omega$ 上满足边界条件，因此，边界层将在 $\partial\Omega_2 = \partial\Omega - \partial\Omega_1$ 附近，即在场 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 指向 Ω 内的那些点处展开．这样的点是由条件

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) < 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega_2 \quad (7.2.5)$$

所刻划的，这里 $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ 是 $\partial\Omega$ 于点 $\mathbf{x}$ 处的外法线．因此，我们将寻找形如

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + e^{-g/\varepsilon^2}(h + \varepsilon^2 h_1 + \cdots)$$

的解．从(7.2.1)式得到

$$\frac{e^{-g/\varepsilon^2} h}{\varepsilon^2}[|\nabla g|^2 - \mathbf{b} \cdot \nabla g] + e^{-g/\varepsilon^2}(\mathbf{b} - 2\nabla g) \cdot \nabla h + O(\varepsilon^2).$$
$$= 0. \quad (7.2.6)$$

在(7.2.6)式中令第一个括号等于零可求得函数 g，即

$$|\nabla g|^2=\mathbf{b}\cdot\nabla g. \tag{7.2.7}$$

如对 $\mathbf{x}\in\partial\Omega_2$，有 $g(\mathbf{x})=0$ 和对一切 $\mathbf{x}\in\Omega$，有 $g(\mathbf{x})>0$，则边界层效应出现。在 Ω 中，函数 $h(\mathbf{x})$ 是方程

$$(\mathbf{b}-2\nabla g)\cdot\nabla h-\Delta gh=0 \tag{7.2.8}$$

的解，且在 $\partial\Omega_2$ 上 h 满足边界条件

$$h(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-u(\mathbf{x}). \tag{7.2.8'}$$

由于 $e^{-g/\varepsilon}h(\mathbf{x})$ 在边界层 $\{\mathbf{x}|\mathrm{dist}(\mathbf{x},\ \partial\Omega_2<\varepsilon\}$ 的外部是超越小量，即当 $\varepsilon\to0$ 对一切 $n>0$，$e^{-g/\varepsilon}h(\mathbf{x})\varepsilon^{-n}\to0$，因此，只需要在 $\partial\Omega_2$ 的一个邻域内构造 g 和 h。方程 (7.2.7) 按特征曲线方法求解，即解方程组(参见(10.2.7)式，(10.2.8)式)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=2\mathbf{p}-\mathbf{b};\quad \frac{d\mathbf{p}}{dt}=\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{p};\quad \frac{dg}{dt}=|\mathbf{p}|^2 \tag{7.2.9}$$

其中 $\mathbf{p}=\nabla g$ 和 $(\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{p})_i=\dfrac{\partial\mathbf{b}}{\partial x_i}\cdot\mathbf{p}.$

变量 $\mathbf{x}(t)$ 作为边界点的坐标在 $\partial\Omega_2$ 上被确定，变量 $\mathbf{p}$ 用(7.2.8)式的特征曲线 $\mathbf{x}(t)$ 在 $\partial\Omega_2$ 上进入 Ω 这样一种方法确定，例如在 $\partial\Omega_2$ 上，$\mathbf{p}=(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$[58].

函数 h 根据(7.2.8)式沿特征曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的积分求得，由于(7.2.8)式能写成

$$\frac{dh}{dt}(\mathbf{x}(t))+g(\mathbf{x}(t))h=0,$$

于是有 $$h(\mathbf{x}(t))=h(\mathbf{x}(0))\exp\left[-\int_0^t\Delta g(\mathbf{x}(s)ds\right],$$

根据(7.2.8)式，$h(\mathbf{x}(0))=f(\mathbf{x})-u(\mathbf{x})$ [这里 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}\in\partial\Omega_2$]。这个构造表明上述的直观描述是正确的。

习题 7.2.1

证明：期望离出时间 $E_x\tau^\varepsilon \to \tau_x$，其中 τ_x 是从 $\mathbf{x}$ 出发的轨线 $\mathbf{x}(t)$ 必须离开区域[在 $\mathbf{y}(\mathbf{x})$] 的时间。对时齐的情形导出对应的边值问题(5.4.5)式的渐近展开式。

习题 7.2.2

考虑在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}>0$ 的情况，即，向量场 $\mathbf{b}$ 在 $\partial\Omega$ 的一切点上指向 Ω 的外部。在此情形下，至少存在一个临界点 $\mathbf{x}_0\in\Omega$，使得 $\mathbf{b}(\mathbf{x}_0)=0$（不失一般性，假设仅有一个这样的点 $\mathbf{x}_0$ 存在，且 $\mathbf{x}_0=0$）。这种情形没有边界层展开，但由于一切特征曲线 $\mathbf{x}(t)$，当 $t\to-\infty$ 时收敛到 $\mathbf{x}_0=0$，简化问题 (7.2.3)式的解 $u(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0=0$ 上一定是不连续的。在 $\mathbf{x}=0$ 附近构造一个内层展开式 $u_\varepsilon(\mathbf{x})=l(\varepsilon,\mathbf{x})+O(\varepsilon^2)$，这里 $l(\varepsilon,\mathbf{x})$ 是内层，即 $l(\varepsilon,\mathbf{x})$ 是光滑的，而且当 $\varepsilon\to 0$ 时，$l(\varepsilon,\mathbf{x})\to u(\mathbf{x})$，$l(\varepsilon,\mathbf{x})=e^{g/\varepsilon^2}(h+\cdots)$[72,97]。

习题 7.2.3*

考虑当毁灭影响到系统时的问题(见第 5.1 节)[36,41,44,50,58,62]。

习题 7.2.4*

假设吸收出现在 $\partial\Omega_1$ 上，反射出现在 $\partial\Omega_2$ 上以及毁灭可以影响系统，导求我们感兴趣的量的展开式[40,61,62]。

习题 7.2.5*

对福克尔-普朗克方程以及对离出时间的分布(5.4.6)，提出类似的渐近理论[2,3,41]。

习题 7.2.6

(i) 考虑在 $\partial\Omega$ 上反射的情况。证明由(7.2.1)式定义的，在 $\partial\Omega$ 上具

有反射的确定型过程 $\mathbf{x}(t)$，对一切时间 t，$\mathbf{x}(t)\in\Omega$ 满足微分方程

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\chi_{\bar{\Omega}}(\mathbf{x}(s))\mathbf{b}(\mathbf{x}(s))ds+\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},\ t),$$

对一切时间 t，这里 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}$，$t_0=\inf\{t\,|\,\mathbf{x}(t_0)\in\partial\Omega\}$，和

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},\ t)=-\int_0^t\chi_{\partial\Omega}(\mathbf{x}(s)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}(s))[\mathbf{b}(\mathbf{x}(s))\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}(s))\vee 0]ds,$$

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},\ 0)=0$$

即
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{b}(\mathbf{x})-\chi_{\partial\Omega}(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})[\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\vee 0].$$

这样 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 在点 $\mathbf{x}\in\partial\Omega$ 上相切于边界，并使得 $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}>0$ 并等于 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 的切向分量；在边界点 $\mathbf{x}$ 上 $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 使得

$$\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\leqslant 0.$$

(ii*) 与 (7.1.2) 式类似的结构决定一个随机反射过程 $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x},\ t)$，使得 $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x},\ t)$ 关于 $\mathscr{F}_t$ 是可测的[5]，几乎处处连续，$\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x},\ 0)=\mathbf{0}$ 且若 $\mathbf{x}_\varepsilon(t)\in\Omega$，$\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x},\ t)\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_\varepsilon(t))$ 在集合 $\{t\,|\,\mathbf{x}_\varepsilon(t)\in\partial\Omega\}$ 上递减，则 $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x},\ t)$ 是常数。方程(7.1.2)式取如下形式：

$$d\mathbf{x}_\varepsilon(t)=\mathbf{b}(\mathbf{x}_\varepsilon)dt+\varepsilon\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_\varepsilon)d\mathbf{w}+\chi_{\partial\Omega}(\mathbf{x}_\varepsilon)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_\varepsilon)d\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x},\ t).\tag{7.2.10}$$

证明当 $\varepsilon\to 0$ 时[1,30]

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t)\to\mathbf{x}(t)\quad 和\quad \boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x},\ t)\to\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},\ t).$$

(iii) 对(7.2.10)式运用伊藤公式，证明当 $\lambda>0$ 时，牛曼问题

$$L_\varepsilon u-\lambda u=0,\quad 在\ \Omega\ 中，$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=g,\quad 在\ \partial\Omega\ 上$$

的解 u_ε 能够表示为

$$u_\varepsilon(\mathbf{x})=E_{\mathbf{x}}\left[\int_0^\infty e^{-\mu t}g(\mathbf{x}_\varepsilon(t))d_t\xi_\varepsilon(\mathbf{x},\ t)\right].$$

推出
$$u_\varepsilon(\mathbf{x})\to u(\mathbf{x})=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(\mathbf{x}(t))d_t\xi(\mathbf{x},\ t),$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},\ t)$ 按(ii*)定义。

(iv) 考虑混合型边值问题

$$L_\varepsilon u=0,\quad 在\ \Omega\ 中，\tag{7.2.11}$$

$$\lambda u+\frac{\partial u}{\partial\nu}=h,\ 在\ \partial\Omega\ 上，\lambda>0.$$

证明(7.2.11)式的解 u_ε 能够表示为

$$u_\varepsilon(\mathbf{x})=E_{\mathbf{x}}\left[\int_0^\infty h(\mathbf{x}(t))e^{-\lambda_\varepsilon\xi^{(\mathbf{x},t)}}d_t\xi(\mathbf{x},t)\right]$$

和
$$u_\varepsilon(\mathbf{x})\to u(\mathbf{x})=\int_0^\infty h(\mathbf{x}(t))e^{-\lambda\xi^{(\mathbf{x},t)}}d_t\xi(\mathbf{x},t).$$

[注意　当 $t\to\infty$ 时 $\xi_\varepsilon(\mathbf{x},t)\to\infty$][1]。

7.3　越流的小扩散

在动态系统 (7.1.1) 式中，假设在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处有一个中心，而且 $\partial\Omega$ 是 (7.1.1) 式的闭特征曲线（积分曲线），考察 (7.1.2) 式。那么，(7.1.2) 式描述了越流的小扩散(图 7.1.1b)。奇异摄动问题 (7.2.1) 式的一个简单例子是下列由极坐标表示的问题：

$$\varepsilon^2\Delta u+f(r)\frac{\partial u}{\partial\theta}=0,\ 在\ R_1<r<R_2\ 中, \tag{7.3.1}$$

$$u(R_i,\theta)=\phi_i(\theta),\ (i=1,2).$$

此问题的解是 $u_0=u(r)$。对于(7.3.1)式关于 θ 从 0 到 2π 积分，得到

$$\varepsilon^2\Delta\tilde{u}=\varepsilon^2\left(\hat{u}_{rr}+\frac{1}{r}\hat{u}_r\right)=0,$$

其中
$$\hat{u}(r)=\hat{u}_\varepsilon(r)=\int_0^{2\pi}u(r,\theta)d\theta.$$

这样
$$\hat{u}_\varepsilon(r)=c_1\ln r+c_2,$$

所以
$$u_\varepsilon(r,\theta)\to u_0(r)=a\ln r+b,$$

其中
$$a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi_2(\theta)-\phi_1(\theta)}{\ln R_2-\ln R_1}d\theta$$

和
$$b=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi_1\ln R_2-\phi_2\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}d\theta.$$

由此得出 $p_\varepsilon(R_1,\ \theta,\ r,\ \theta_0)\to\dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\ln R_2-\ln r}{\ln R_2-\ln R_1}$

和当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$p_\varepsilon(R_2,\ \theta,\ r,\ \theta_0)\to\frac{1}{2\pi}\,\frac{\ln r-\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}.$$

若$R_1=0$ 和 $\Omega=\{r<R\}$，则 $c_1=0$，所以

$$u_0(r)=\text{常数}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)d\theta$$

和当 $\varepsilon\to 0$ 时， $p_\varepsilon(R,\ \theta,\ r,\ \theta_0)\to\dfrac{1}{2\pi}.$

期望离出时间 $E_x\tau_\varepsilon$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，显然趋于无穷．它是邓肯方程(5.4.5)的解：

$$L_\varepsilon u=\varepsilon^2\Delta u+f(r)\frac{\partial u}{\partial\theta}=-1,\ R_1<r<R_2, \qquad (7.3.2)$$

$$u(R_i,\ \theta)=0 \quad (i=1,\ 2).$$

很容易看出 $u=u_\varepsilon$ 与 θ 无关，所以

$$E_{r,\theta}\tau_\varepsilon=u_\varepsilon(r)=\frac{\pi}{2\varepsilon^2}\left\{\frac{R_1^2\ln R_2-R_2^2\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}+\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln R_2-\ln R_1}\ln r-r^2\right\}.$$

特别，若 $\Omega=\{r<R\}$，则 $c_1=0$ 和

$$E_{r,\theta}\tau_\varepsilon=\frac{\pi}{2\varepsilon^2}(R^2-r^2),$$

所以 $$E_0\tau_\varepsilon=\frac{\pi}{2\varepsilon^2}R^2.$$ [44]

习题 7.3.1

(i) 写出与(7.3.2)式中算子 L_ε 对应的方程 (7.1.2)，并对这种情况写出福克尔–普朗克方程．

(ii) 运用分离变量法构造

$$p_\varepsilon(r,\ \theta,\ r_0,\ \theta_0,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,n}{\varepsilon}r\right)J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,n}{\varepsilon}r_0\right)r_0 e^{-\lambda_n t}$$

其中 λ_n 是 L_ε 的特征值[即 $L_\varepsilon u_n+\lambda_n u_n=0,\ u_n(R_i)=0,\ i=1,\ 2$]. 这里 $J_0(x)$ 是零阶贝塞尔函数. 假设 $p_\varepsilon(r,\ \theta,\ r_0,\ \theta_0,\ 0)=\delta(r-r_0)$, 证明 $\lambda_n=\varepsilon^2x_n^2/R^2$, 式中 x_n 是 $J_0(x)$ 的第 n 个零点,并证明

$$\begin{aligned}E_0\tau_\varepsilon&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-J_0'(x_n)}{x_nJ_1^2(x_n)}\frac{1}{\lambda_n}\\&=\frac{R^2}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-J_0'(x_n)}{x_n^3J_1^2(x_n)}=\frac{\pi R^2}{2\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

7.4 逆流的小扩散

假如 (7.1.1) 式在 Ω 中有一个稳定平衡点, 考虑 (7.1.2) 式. 不失一般性我们假设 $\mathbf{b}(\mathbf{0})=\mathbf{0}\in\Omega$ 和在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{b}\cdot\nu<0$, 即, 在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{b}$ 指向 Ω 中, 特征曲线 $\mathbf{x}(t)$ 收敛到原点, 以使 (7.1.2)式描述了逆流的小扩散(参见图 7.1.1c).

$$L_\varepsilon u=\varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ \text{在}\ \Omega\ \text{中},\tag{7.4.1}$$

$$u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},$$

并且简化方程是

$$Lu=\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\equiv\mathbf{b}\cdot\nabla u=0.\tag{7.4.2}$$

在这种情况下,简化方程(7.4.2)的解 $u_0(\mathbf{x})$ 沿着特征曲线必为常数. 若 $u_\varepsilon(\mathbf{x})\to u_0(\mathbf{x})$ 且 $u(\mathbf{x})$的导数在原点的邻域中保持有界, 则当 $\varepsilon\to0$ 时解 $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ 具有连续展开式, 所以 $u_0(\mathbf{x})$ 在原点 $\mathbf{0}$ 附近必为连续. 因为所有特征曲线在 $\mathbf{0}$ 处会合, 而且 $u_0(\mathbf{x})$ 在特征曲线上是常数且在 $\mathbf{0}$ 处连续, 故 $u_0(\mathbf{x})$ 在 Ω 中必是常数, 譬如说, $u_0(\mathbf{x})=C_0$. 下面的例子证明了这种情况. 在平面上令 $\mathbf{b}(\mathbf{x})=-(x_1,\ x_2)$, 则狄里克莱问题(7.4.1)与(7.4.2)

为

$$\varepsilon \Delta u_\varepsilon - r\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = 0, \text{在 } \Omega \text{ 中}, \qquad u = f, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{7.4.3}$$

这里 Ω 是包含原点的一个星形域(即任一经过原点的射线与 $\partial\Omega$ 相交一点)。方程(7.4.3)现在能够写成

$$\nabla\cdot(e^{-r^2/2\varepsilon}\nabla u_\varepsilon) = 0,$$

所以,乘以 u_ε 并且在圆 $\{r \leqslant R\}$ 上积分,就得到

$$\frac{1}{2}e^{-R^2/2\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u^2}{\partial R}(R, \phi)d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2/2\varepsilon}|\nabla u|^2 r\,dr\,d\phi.$$

由于后一项积分中的被积函数是非负的,其积分随积分区域的减小而递减。所以

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial u^2}{\partial R}(R, \phi)d\phi \geqslant 2e^{R^2/2\varepsilon}\int_0^{R/2}\int_0^{2\pi}e^{-r^2/2\varepsilon}|\nabla u|^2 r\,dr\,d\phi$$

$$\geqslant 2e^{3R^2/8\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{R/2}|\nabla u|^2 r\,dr\,d\phi. \tag{7.4.4}$$

此外,用 R 乘不等式(7.4.4),关于 R 从 0 到 δ 积分,并且交换积分次序,得到

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} R\frac{\partial u^2}{\partial R}(R, \phi)dR\,d\phi$$

$$\geqslant 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta/2}\int_{2r}^{\delta} e^{3R^2/8\varepsilon}R\,dR|\nabla u|^2 r\,dr\,d\phi$$

$$\geqslant \frac{16\varepsilon}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta/3}(e^{3\delta^2/8\varepsilon} - e^{3r^2/2\varepsilon})|\nabla u|^2 r\,dr\,d\phi$$

$$\geqslant \frac{16\varepsilon}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta/3}(1 - e^{-5\delta^2/24\varepsilon})|\nabla u|^2 r\,dr\,d\phi.$$

如果 ε 充分小,得到

$$\delta\int_0^{2\pi}u^2(\delta,\ \phi)d\phi-\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}u^2(r,\ \phi)r\,dr\,d\phi$$

$$\geqslant\frac{8}{3}\cdot\varepsilon e^{3\delta^2/8\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta/3}|\nabla u|^2r\,dr\,d\phi.$$

(7.4.3) 式的极大值原理蕴涵着 $\max\overline{\Omega}|u_\varepsilon|\leqslant\max\limits_{\partial\Omega}|f(\mathbf{x})|$，因此由最后一个不等式引出

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta/3}|\nabla u_\varepsilon|^2r\,dr\,d\phi\leqslant Ce^{-\delta^2/4\varepsilon}\max_{\partial\Omega}|f|^2,\qquad(7.4.5)$$

其中 C 是与 ε 和 $f(x)$ 无关的正常数．对 u 的所有阶导数能够得出类似的不等式，因此按索伯列夫不等式[25]，当 $\varepsilon\to0$ 时，有

$$\nabla u_\varepsilon\to0.$$

习题 7.4.1

对 n 维的情况推导不等式(7.4.5)．[一般情况的证明见[42]．]

因此，$u_\varepsilon(\mathbf{x})$ 的外展开式的首项是常数 $u_0(x)=C_0$．外展开式在 Ω 的内部也成立，但在 $\partial\Omega$ 附近不成立，因为一般它不能满足给定的边界条件(7.4.2)式．因此，在边界的邻域中，引进局部坐标，可以构造边界层展开式．特别，令 $\rho(\mathbf{x})$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的一个光滑函数使得在 $\partial\Omega$ 上 $\rho=0$；在 Ω 中 $\rho<0$，以及对 $\partial\Omega$ 附近的任意 $\mathbf{x}$，$\rho(\mathbf{x})=-\mathrm{dist}(\mathbf{x},\ \partial\Omega)$．然后引进坐标系 $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1},\ z)^T$($n$ 维)，我们用$(\mathbf{y}',\ z)$表示．不失一般性，取 $y_i=x_i$ $(i=1,\ \cdots,\ n-1)$ 和 $y_n=z=\rho(\mathbf{x})$．

这样 $y_i(i\leqslant n-1)$ 是平面 $z=0$ 上的切向变量，而 z 定义为法向变量，表示使得在 $\partial\Omega$ 上 $\nabla\rho=\boldsymbol{\nu}$，这里 $\partial\Omega$ 的外法向在新的坐标系中是 $\boldsymbol{\nu}=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$．现在采用伸缩变换 $\eta=z/\varepsilon^2$，并且寻求形如

$$u_\varepsilon \sim \sum_j U_j(\mathbf{y}', \eta)\varepsilon^j \tag{7.4.6}$$

的解.

把(7.4.6)式代入到新坐标系形式的(7.4.1)式中，并且分别使得 ε 的各次幂的系数等于0，我们求得首项 U_0 满足常微分方程

$$a\frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2}+b^0\frac{\partial U_0}{\partial \eta}=0,\quad -\infty<\eta<0, \tag{7.4.7}$$

其中

$$a=a(y')=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\nu_i\nu_j>0$$

和 $$b^0=b^0(\mathbf{y}')=\sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})\nu_i<0,\quad (\mathbf{x}=(\mathbf{y}', 0)).$$

(7.4.7)满足边界条件 $U_0(\mathbf{y}', 0)=f(\mathbf{y}')$ 的解由下式给定：

$$U_0=C_1(\mathbf{y}')+(f(\mathbf{y}')-C_1(\mathbf{y}'))e^{-b^0\eta/a}.$$

对照外层展开式的首项与边界层展开式的首项，则可导出 $C_1(\mathbf{y}')=C_0$. 因此，$u_\varepsilon(\mathbf{x})$ 的一致展开式中的首项由下式给出：

$$u_\varepsilon(\mathbf{x})\sim C_0+(f(\mathbf{x})-C_0)e^{\zeta(\mathbf{x})/\varepsilon^2} \tag{7.4.7'}$$

其中 $\zeta(\mathbf{x})\equiv -b^0\rho/a$ 而且常数 C_0 是待定的. 为了确定 C_0，并且由此确定 $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ 的唯一渐近形式，我们需要一个条件，而此条件可由下求得：取(7.4.1)式与伴随方程

$$L_\varepsilon^* Z=\varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial(a_{ij}Z)}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(b_i Z)}{\partial x_i}=0 \tag{7.4.8}$$

的解 Z_ε 的内积，这里伴随方程是规范化的，使得 $Z_\varepsilon(0)=1$. 运用恒等式，得到条件

$$\int_\Omega Z_\varepsilon L_\varepsilon u_\varepsilon\, dx=0. \tag{7.4.9}$$

用 u_ε 与 Z_ε 的渐近形式，就能确定常数 C_0. 现在采用射线方法[64, 11]构造 Z_ε 的渐近展开式. 于是寻求的 Z_ε 应具有形式

$$Z_\varepsilon = e^{\phi/\varepsilon^2} w_\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{7.4.10}$$

其中

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} w_j(\mathbf{x}) \varepsilon^j, \tag{7.4.11}$$

而且 $\phi(\mathbf{0})=1$, $w_0(\mathbf{0})=1$.

把(7.4.10)式和(7.4.11)式代入到伴随方程(7.4.8)中，并且分别使 ε 的各个幂的系数等于0，得到 ϕ 与 w_j 的方程. 特别，ϕ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{7.4.12}$$

而在 w 的展开式中，首项 w_0 满足方程

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(2a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - b_i\right) \frac{\partial w_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial (a_{ij})}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right] w_0 = 0. \tag{7.4.13}$$

u_ε 展开式中的首项由(7.4.7′)式给定，而 Z_ε 展开式中的首项由(7.4.12)式与(7.4.13)式的解给定，现在把这二个首项代入到(7.4.9)式中. 分部积分后仅保留首项得到

$$\int_{\partial\Omega} e^{\phi/\varepsilon^2} w_0 \left[(f(\mathbf{x}) - C_0)\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu} - f(x)\left(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)\right] dS \sim 0, \tag{7.4.14}$$

这里余法向导数 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 定义为

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{i,j} a_{ij} \nu_j \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \tag{7.4.14′}$$

解出 C_0，得到

$$C_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{\partial\Omega} e^{\phi/\varepsilon^2} w_0 f(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS}{\int_{\partial\Omega} e^{\phi/\varepsilon^2} w_0 \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS} \tag{7.4.15}$$

在(7.4.15)式中，对积分的主要贡献来自$\partial\Omega$上使ϕ达到极大值的点，在这种点上，$\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\boldsymbol{\nu}$，联系(7.4.12)式一起便蕴涵在极$\phi$取大值的点上$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}$。因此，

$$C_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial\Omega}e^{\phi/\varepsilon^2}w_0 f\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}dS}{\int_{\partial\Omega}e^{\phi/\varepsilon^2}w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS}. \tag{7.4.16}$$

注意到函数w_0在边界上是非负的，因为可把(7.4.3)式沿着特征曲线方向写成一个一阶常微分方程。这样

$$w_0(\mathbf{x}(t))=w_0(\mathbf{x}(0))\exp\left\{-\int_0^t\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}+2\frac{\partial(a_{ij})}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}-\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right]ds\right\}, \tag{7.4.17}$$

这里(7.4.17)式中的$\mathbf{x}(t)$是对应于(7.4.12)式的特征方程

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^n 2a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}-b_i\quad(i=1,\cdots,n) \tag{7.4.18}$$

的解(见第十章)。对任意点$\mathbf{y}\in\partial\Omega$，令$\mathbf{x}(t,\mathbf{y})$是(7.4.18)式满足$\mathbf{x}(0,\mathbf{y})=\mathbf{y}$的解。在$\partial\Omega$上选择$\nabla\phi$使得当$t\to\infty$时$\mathbf{x}(t,\mathbf{y})\to 0$并满足(7.4.12)式。这能够办得到，即在一个稍大的区域$\Omega'\supset\Omega$的边界$\partial\Omega'$上规定$\nabla\phi$，使得当$t\to\infty$时$\mathbf{x}(t,\mathbf{y})\to 0$而且(7.4.12)式在$\Omega'$中是被满足的，于是也在$\partial\Omega$上被满足。因此，由，$w_0(\mathbf{0})=1$得

$$w_0(\mathbf{y})=\exp\int_0^\infty\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}+2\frac{\partial(a_{ij})}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}-\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right]ds>0.$$

因此常数C_0和$u_\varepsilon(\mathbf{x})$的一致展开式中的首项可被唯一确定。利用(5.4.9)式或(5.4.9')式从

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega}f(\mathbf{y})p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}=C_0, \qquad (7.4.19)$$

即从

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\partial\Omega}f(\mathbf{y})p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}-\frac{\int_{\partial\Omega}f(\mathbf{y})e^{\phi/\varepsilon^2}w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}dS_{\mathbf{y}}}{\int_{\partial\Omega}e^{\phi/\varepsilon^2}w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}dS_{\mathbf{y}}}\right]=0 \qquad (7.4.20)$$

能够计算

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P(\mathbf{x}_\varepsilon(\tau)=\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}_\varepsilon(0)=\mathbf{x})=\lim_{\varepsilon\to 0}p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$$

$$(\mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{y}\in\partial\Omega). \qquad (7.4.21)$$

首先注意到(7.4.19)式蕴涵着 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 与 $\mathbf{x}$ 无关. 根据(7.4.20)式中积分的近似估计我们来计算这个极限(在广义函数的意义上), 而且正如下面看到的那样, 极限事实上是一个广义函数. 由于(7.4.20)式中的积分是拉普拉斯型积分, 主要贡献是 $\phi(\mathbf{x})$ 在 $\partial\Omega$ 上取极大值的点处所提供的.

(i) 若 ϕ 在 $\partial\Omega$ 上的极大值 $\hat{\phi}$ 在具有非空内部 U^0 的集合 $U\subset\partial\Omega$(例如对二维而论, 在一段弧或者弧的并)上达到, 而且 $\partial\Omega=U-U^0$ 的测度是 0, 则

$$p(\mathbf{y})=\lim_{\varepsilon\to 0}p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\frac{\chi_U(\mathbf{y})w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})}{\int_U w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}}, \qquad (7.4.22)$$

这里 $\chi_U(\mathbf{y})$ 是集 U 的示性函数.

(ii) 若 ϕ 在 $\partial\Omega$ 上的极大值 $\hat{\phi}$ 在 $\partial\Omega$ 上的点 $\mathbf{Q}_1,\ \cdots,\ \mathbf{Q}_m$ 上达到, 而且若

$$H_k=H(\mathbf{Q}_k)\equiv\det\frac{\partial^2\phi}{\partial y_i\partial y_j}\bigg|_{\mathbf{Q}_k}\neq 0 \quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ n-1)$$

对 $k=1,\ \cdots,\ m$, 则

$$p(\mathbf{y})=\frac{\sum_{k=1}^{m} H^{-1/2}(\mathbf{Q}_k)w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{Q}_k)\delta(\mathbf{y}-\mathbf{Q}_k)}{\sum_{k=1}^{m} H^{-1/2}(\mathbf{Q}_k)w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{Q}_k)}, \quad (7.4.23)$$

这里 $\delta(\mathbf{y})$ 是 $\partial\Omega$ 上狄拉克 δ 函数。

(iii) 在二维情况下 $(n=2)$，令 $(x, y)=(x(s), y(s))$ 是 $\partial\Omega$ 的参数表示，这里 s 表示 $\partial\Omega$ 上的弧长。若 ϕ 在 $\partial\Omega$ 上的点 $s_1, \cdots, s_m$ 上取得极大值 $\hat{\phi}$，而且当 $s-s_i\to 0$ 时

$$\begin{aligned}&\phi(x(s_i), y(s_i))-\phi(x(s), y(s))\\&=d_i^{-2k_i}(s-s_i)^{2k_i}(1+o(1))\end{aligned}$$

且 $d_i>0(i=1, 2, \cdots, m)$，若 $k\equiv k_1=k_2=\cdots=k_l=\max_i k_i(l\leqslant m)$，则

$$p(x(s), y(s))=\frac{\sum_{j=1}^{l} d_j w_0\,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(s_j)\delta(s-s_j)}{\sum_{j=1}^{l} d_j w_0\,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(s_j)}. \quad (7.4.24)$$

收敛的证明概括在习题 7.4.2*～7.4.5* 中，是由卡明 (Kamin)[42]给出的.

习题 7.4.2*

令 $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ 是

$$\begin{aligned}&L_\varepsilon u=\varepsilon\Delta u-\nabla\phi\cdot\nabla u=0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中},\\&u=f, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{aligned} \quad (7.4.25)$$

的解. 假设 $\phi(\mathbf{0})=0$，对 $\mathbf{x}\in\Omega-\{0\}$，$\phi(\mathbf{x})>0$，$\nabla\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，

$$\det\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{0})\neq 0,\ \nabla\phi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}\geqslant 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}$$

$$\nabla\phi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}\geqslant\gamma|\mathbf{x}|^2,\ (\gamma>0) \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

并且在 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}>0$. 引进变量 $\mathbf{y}=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\varepsilon}}$ 并注意到

$$|\nabla\phi(\mathbf{y}\sqrt{\varepsilon})|\leqslant C\beta\sqrt{\varepsilon}\,|\mathbf{y}|,\quad (|\mathbf{y}|\leqslant\delta).$$

用内 Schauder 估计[95]，证明 $\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}}\right| \leqslant C \quad (|\mathbf{y}| \leqslant \delta)$. 推出

$$|u_\varepsilon(\mathbf{x}) - u_\varepsilon(0)| \leqslant C\sqrt{\varepsilon} \quad (|\mathbf{x}| \leqslant \varepsilon). \tag{7.4.26}$$

习题 7.4.3*

构造函数

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}) = h_\varepsilon(\mathbf{x})e^{-g(\mathbf{x})/\varepsilon}, \text{ 这里 } h_\varepsilon(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = f(\mathbf{x}),$$

$h_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ 在 $\partial\Omega$ 的某一邻域 Ω' 外，

$$h_\varepsilon(\mathbf{x}) \in C^\infty(R^n)$$

$$g(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega},$$

$$g(\mathbf{x}) \geqslant 0, \text{ 在 } \Omega' \text{ 中}, \quad L_\varepsilon v_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^m \rho(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad |\rho| \leqslant B,$$

$\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \nu} \leqslant C$，这里 B 与 C 是与 ε 无关的某个常数，且 m 是整数. 类似地，用 1 代替 f 构造函数 $v_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{x}) = h_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{x})e^{-g(\mathbf{x})/\varepsilon}$ 使之满足类似的条件[91].

习题 7.4.4*

证明解 $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ 在 Ω 中允许有下面的渐近展开式：

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u_\varepsilon(0) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) - u_\varepsilon(0)v^{(1)}(\mathbf{x}) + o(1), \tag{7.4.27}$$

这里当 $\varepsilon \to 0$ 时 $o(1)$ 在 Ω 中是一致的. 对 $|\mathbf{x}| \leqslant \delta$ 利用(7.4.7)式并且在 $\Omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| > \varepsilon\}$ 情况下作如下推导. 设

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon^{n-2}}{|\mathbf{x}|^{n-2}}\right) \quad \text{对 } n \geqslant 3,$$

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\left(1 - \frac{\ln|\mathbf{x}|}{\ln \varepsilon}\right) \quad \text{对 } n = 2,$$

并且注意到对 $|\mathbf{x}| = \varepsilon$, $w_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ 和 $w_\varepsilon(\mathbf{x}) = O(\varepsilon)$. 证明若 $n \geqslant 3$ 有

$$L_\varepsilon w = -\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial |\mathbf{x}|}\nabla\phi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x} \leqslant 0, \text{ 在 } \Omega_\varepsilon \text{ 中}$$

和 $$L_\varepsilon w_\varepsilon = -\lambda(n-2)\varepsilon^{n-1}|\mathbf{x}|^{2-n}, \ \partial\Omega \text{ 附近},$$

若 $n=2$ 有 $$L_\varepsilon w_\varepsilon \leqslant \frac{\lambda\varepsilon}{\ln \varepsilon}.$$

令 $z_+(\mathbf{x}) = v_\varepsilon(\mathbf{x}) - u_\varepsilon(0)v_\varepsilon^{(1)}(0) + v_\varepsilon(\mathbf{x})$，并且证明对 $|\mathbf{x}| = \varepsilon z_+(\mathbf{x}) = 0$，对 $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ 和 $\varepsilon \to 0$，

$$z_+(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-u_\varepsilon(0)+w_\varepsilon(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-u_\varepsilon(0)+O(\varepsilon).$$

证明在 Ω_ε 中对 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $L_\varepsilon z_+(\mathbf{x})\leqslant 0$, 所以在 Ω_ε 中

$$L_\varepsilon[u_\varepsilon(\mathbf{x})-u_\varepsilon(0)-z_+(\mathbf{x})]\geqslant 0.$$

利用极大值原理, 证明 $u_\varepsilon(\mathbf{x})-u_\varepsilon(0)-z_+(\mathbf{x})=O(\varepsilon)$. 类似地, 构造 $z_-(\mathbf{x})$, 并证明以上论断是成立的.

习题 7.4.5*

证明当 $\varepsilon\to 0$ 时, 在 Ω 的紧子集上一致地有 $u_\varepsilon(\mathbf{x})\to C_0$. 这里

$$C_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega} e^{-\phi/\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}f(\mathbf{x})\,ds}{\displaystyle\int_{\partial\Omega} e^{-\phi/\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\,ds}.$$

用 $\nabla\cdot e^{-\phi/\varepsilon}\nabla u=0$ 的形式写出(7.4.25)式, 于是

$$\int_{\partial\Omega} e^{-\phi/\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\,ds=0.$$

利用渐近展开式(7.4.27), 这里 $o(1)=\psi_\varepsilon(\mathbf{x})$ 以及

$$L_\varepsilon\psi_\varepsilon(x)=O(\varepsilon). \tag{7.4.28}$$

求得
$$\varepsilon\int_{\partial\Omega} e^{-\phi/\varepsilon}\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu}\,ds=\int_\Omega e^{-\phi/\varepsilon}L_\varepsilon\psi_\varepsilon(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=O(\varepsilon^{1+\frac{n}{2}});$$

从而
$$\int_{\partial\Omega} e^{-\phi/\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}[u_\varepsilon(0)-f(\mathbf{x})]ds$$
$$=\varepsilon\int_{\partial\Omega} e^{-\phi/\varepsilon}\left[\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial\nu}-u_\varepsilon(0)\frac{\partial h_\rho(1)}{\partial\nu}\right]ds+O(\varepsilon^{1+\frac{n}{2}}).$$

推出 $u_\varepsilon(0)\to C_0$, 并利用(7.4.27)式推出 $u_\varepsilon(\mathbf{x})\to C_0$[42].

7.5 例

在某些重要的情况下, 结果可以化简且公式变得很明显, 这时它们仅涉及到所给问题的已知系数. 下例便是这种情形. 若场 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 能分解为一个本质上是位势的梯度场和另一个既正交于梯度场且其散度满足确定条件的场. 这样, 若存在光滑函数 $\psi(\mathbf{x})$ 及光滑向量场 $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ 使得

$$b_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+l_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7.5.1}$$

$$\mathbf{l}\cdot\nabla\psi=\sum_{i=1}^{n} l_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}=0, \tag{7.5.2}$$

和
$$\nabla\cdot\mathbf{l}\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial l_i}{\partial x_i}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=0, \tag{7.5.3}$$

则函数 $\phi(\mathbf{x})$ 和 $w_0(\mathbf{x})$ 由下式明显地给出:

$$\phi(\mathbf{x})=\psi(\mathbf{x}) \tag{7.5.4}$$

和

$$w_0(\mathbf{x})=1. \tag{7.5.5}$$

在这种情况下

$$C_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial\Omega}\exp(\psi/\varepsilon^2)f(\mathbf{x})\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})dS}{\int_{\partial\Omega}\exp(\psi/\varepsilon^2)\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\,dS}. \tag{7.5.6}$$

让我们考虑问题 (7.1.2), 其中 $\sigma_{ij}=\delta_{ij}$, 于是椭圆算子 L_ε 的主要部分是拉普拉斯型的, 同时对某个 ψ 有 $\mathbf{b}(\mathbf{x})=\nabla\psi$. 对这种情形,在 ψ 取极大值的边界点处,有 $\frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial\nu}=-|\mathbf{b}|$ [见 (7.4.14′)式], 其中 $|\mathbf{b}|$ 表示 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 的长度. 由此得出在 (i) 的情况下(见第 7.4 节), 有

$$p(\mathbf{y})=\frac{|\mathbf{b}(\mathbf{y})|\chi_U(\mathbf{y})}{\int_U|\mathbf{b}(\mathbf{x})|\,dS_x}, \tag{7.5.7}$$

在(ii)的情况下,有

$$p(\mathbf{y})=\frac{\sum_{k=1}^{m}H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Q}_k)|\mathbf{b}(\mathbf{Q}_k)|\delta(\mathbf{y}-\mathbf{Q}_k)}{\sum_{k=1}^{m}H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Q}_k)|\mathbf{b}(\mathbf{Q}_k)|}, \tag{7.5.7′}$$

和在(iii)的情况下,有

$$p(x(s),\ y(s))=\frac{\sum_{i=1}^{l} d_i\,|\mathbf{b}(s_i)|\,\delta(s-s_i)}{\sum_{i=1}^{l} d_i\,|\mathbf{b}(s_i)|}. \qquad (7.5.7'')$$

习题 7.5.1

仍取 $\sigma_{ij}=\delta_{ij}$, 考虑二维问题, 而 $\mathbf{b}(\mathbf{x})=-(ax,\ by)$, 其中 a 与 b 是正常数(这是二维奥伦斯坦-乌伦贝克过程). 区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是光滑的, 使得在 $\partial\Omega$ 上, 有 $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}<0$, 但在其他的情况下是任意的. 证明

(i) 若 $\partial\Omega$ 与在 Ω 内的最大的椭圆 $ax^2+by^2=$常数之间的接触, 在 $\partial\Omega$ 的一段弧(或者弧的并) S 上发生, 则

$$\lim_{\varepsilon\to0} u_\varepsilon(x,\ y)=C_0=\frac{\int_S [a^2x^2(s)+b^2y^2(s)]^{\frac{1}{2}} f(\mathbf{x}(s))ds}{\int_S [a^2x^2(s)+b^2y^2(s)]^{\frac{1}{2}} ds}.$$

(ii) 若接触发生在 $\partial\Omega$ 上的相异点$(x_i,\ y_i)$上$(i=1,\ \cdots,\ m)$, 则

$$C_0=\frac{\sum_{i=1}^{l} d_i(a^2x_i^2+b^2y_i^2)^{\frac{1}{2}} f(x_i,\ y_i)}{\sum_{i=1}^{l} d_i(a^2x_i^2+b^2y_i^2)^{\frac{1}{2}}},$$

其中 $(x_i,\ y_i)(i=1,\ \cdots,\ l)$ 是最高阶接触点.

(iii) 考虑 $a=b$ 时的特殊情况.

现在考虑流 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的线性函数的问题, 这如同奥伦斯坦-乌伦贝克过程的情况一样. 更确切地说, 考虑

$$\mathbf{b}(\mathbf{x})=\mathbf{B}\mathbf{x}, \qquad (7.5.8)$$

这里 $\mathbf{B}$ 是一个实矩阵, 它的特征值满足 $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0$, 所以对应的动态系统在原点有一渐近稳定平衡点. 为了构造函数 ϕ 和 w_0(见第 7.4 节), 首先注意到 $\mathbf{B}$ 能分解如下:

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}-\mathbf{A}) \qquad (7.5.9)$$

此处 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵, $(\mathbf{B}-\mathbf{A})$是反对称矩阵, 并且 $\mathrm{tr}\,\mathbf{B}=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$.

习题 7.5.2

定义 $\mathbf{Y}=\int_0^\infty e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{B}^*t}dt$，证明 $\mathbf{Y}$ 是对称正定矩阵（即对一切 $\mathbf{x}\in R^n$，$\mathbf{x}^T\mathbf{Y}\mathbf{x}\geqslant C^2|x|^2$），它满足

$$\mathbf{BY}+\mathbf{YB}^*=-\mathbf{I} \tag{7.5.10}$$

[$\mathbf{I}=(\delta_{ij})$]. 证明矩阵 $\mathbf{A}=-\frac{1}{2}\mathbf{Y}^{-1}$，满足分解式(7.5.9)中的要求.

（提示 要证明 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}=\mathrm{tr}\,\mathbf{B}$，用正交矩阵 $\mathbf{G}$ 使 $\mathbf{Y}$ 对角化，然后利用(7.5.10)式.）

现在定义

$$\phi(\mathbf{x})=-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_ix_j, \tag{7.5.11}$$

并注意到 $|\nabla\phi|^2=\mathbf{b}\cdot\nabla\phi=\mathbf{Bx}\cdot\nabla\phi$，$\Delta\phi=-\mathrm{tr}\,\mathbf{A}=-\nabla\cdot\mathbf{Bx}=-\mathrm{tr}\,\mathbf{B}$，所以 $w_0\equiv1$. 这样，在(i)的情况下，有

$$p(\mathbf{y})=|\mathbf{Ay}|\chi_U(\mathbf{y}), \tag{7.5.12}$$

在(ii)的情况下，有

$$p(\mathbf{y})=\frac{\sum_{k=1}^m H_k^{-\frac{1}{2}}|\mathbf{Ay}_k|\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}_k)}{\sum_{k=1}^m H_k^{-\frac{1}{2}}|\mathbf{Ay}_k|},$$

和在(iii)的情况下，有

$$p(\mathbf{y})=\frac{\sum_{i=1}^l d_i|\mathbf{Ay}_i|\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}_i)}{\sum_{i=1}^l d_i|\mathbf{Ay}_i|}$$

习题 7.5.3

考虑方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt}=-x+y^2+\varepsilon\, dw_1, \\
\dfrac{dy}{dt}=y-xy+\varepsilon\, dw_2,
\end{cases}
\tag{7.5.13}
$$

式中 w_1, w_2 是二维布朗运动. 导出如下关于离出点概率分布的狄里克莱问题(见第5.4节):

$$
\frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u-r\frac{\partial u}{\partial r}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}=0, \text{在 } \Omega \text{ 中}, \qquad u=f, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{7.5.14}
$$

其中 r, θ 是平面上的极坐标. 证明 $\phi=-\dfrac{r^2}{2}$ 和

$$
w_0=(\cosh r+\sinh r\cos\theta)^{-1}.
$$

令 r_0 是 Ω 中以原点为圆心的内接最大圆半径. 证明在(i)的情况下, 有

$$
p(x, y)=\frac{[\cosh r_0+\sinh r_0\cos\theta]^{-1}\chi_U}{\int_U[\cosh r_0+\sinh r_0\cos\theta]^{-1}r_0 d\theta}, \tag{7.5.15}
$$

和在(iii)的情况下, 有

$$
p(x, y)=\frac{\sum_{i=1}^{l}d_i[\cosh r_0+\sinh r_0\cos\theta_i]^{-1}\delta(r_0, (\theta-\theta_i))}{\sum_{i=1}^{l}d_i[\cosh r_0+\sinh r_0\cos\theta_i]^{-1}}
$$

这里 (x, y) 对应于 $r_0(\cos\theta, \sin\theta)$[39].

习题 7.5.4

假设边界 $\partial\Omega$ 是分段光滑的, 讨论离出的理论(例如 $\partial\Omega$ 包含拐角等).

习题 7.5.5

用越势垒扩散电流来解释有关 $p(x, y)$ 的公式[9].

7.6 期望离出时间和奇异摄动中的第一特征值

设 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 是一个作为势的梯度的流. 现在, 我们专门来考

虑使满足 (7.5.1) 式且 $\mathbf{l}=\mathbf{0}$ 的流 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$，这样在 $\partial\Omega$ 上 $-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=\mathbf{b}\cdot\nu>0$ [见 (7.4.14')式]. 我们对 ψ 规范化，使 $\psi(\mathbf{0})=0$. 考虑流中单一稳定平衡点的情形，譬如说，$\mathbf{b}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 于是 $\psi(\mathbf{x})$在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处达到它的唯一极小值，并且在 Ω 中 $\psi(\mathbf{x})\geqslant 0$. 令 λ_1^ε 是 L_ε 的主特征值[由(7.4.1)式给出]，即 λ_1^ε 是使得下列问题有非平凡解的最小正数 λ (见第 10.3 节)：

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon u+\lambda u=0, &\quad \text{在 } \Omega \text{ 中},\\
u=0, &\quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.
\end{aligned}
\tag{7.6.1}
$$

$\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ 的转移概率密度函数 $p_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ (在 $\partial\Omega$ 上具吸收) 是后向柯尔莫哥洛夫方程第一初始与边值问题的格林函数，对与时间无关的情形此方程的系数由下式给出：

$$
\begin{aligned}
&L_\varepsilon u_\varepsilon-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}=0, \quad \text{在 } Q=\Omega\times(0, \infty)\text{中},\\
&u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)=0, \quad \text{在 } \partial\Omega\times(0, \infty) \text{ 上},\\
&u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0)=f(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \Omega\times\{0\} \text{ 中}.
\end{aligned}
\tag{7.6.2}
$$

算子

$$
\widetilde{L}_\varepsilon=\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}
$$

与 L_ε 不同是由于一次项

$$
\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j},
$$

所以用 $\widetilde{L}_\varepsilon$ 代替 L_ε 时 (7.4.13) 式将要改变. 算子 $\widetilde{L}_\varepsilon$ 在空间 $L^2(\Omega)$中是自伴随的，该空间的内积为

$$
(u, v)=\int_\Omega e^{-\psi(\mathbf{x})/\varepsilon^2}u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x},
\tag{7.6.3}
$$

这里 $\psi(\mathbf{x})$ 按(7.4.14')式定义. 由此得出 L_ε 具有实特征函数组成的完全规范化正交集 $\{\phi_j\}$，而且满足

$$
\widetilde{L}_\varepsilon\phi_j=-\lambda_j^\varepsilon\phi_j, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中},
\tag{7.6.4}
$$

$$
\phi_j=0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},
\tag{7.6.5}
$$

和

$$\int_{\Omega}\phi_j\phi_k e^{-\psi/\varepsilon^2}d\mathbf{x}=\delta_{jk}. \tag{7.6.6}$$

这里 $\lambda_j^\varepsilon>0$ 是 L_ε 的特征值．这样

$$P_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)\sim\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\psi(\mathbf{y})/\varepsilon^2}\phi_j(\mathbf{y},\ \varepsilon)\phi_j(\mathbf{x},\ \varepsilon)e^{-\lambda_j^\varepsilon t}. \tag{7.6.7}$$

按(7.6.6)式规范化的特征函数 $\phi_j(\mathbf{x},\ \varepsilon)$，对 ε 是无界的．因此我们把它写成

$$\phi_j(\mathbf{x},\ \varepsilon)=C_j(\varepsilon)g_j(\mathbf{x},\ \varepsilon), \tag{7.6.8}$$

此处函数 $g_j(\mathbf{x},\ \varepsilon)$ 为有界函数，按

$$\int_{\Omega}g_j^2(\mathbf{x},\ \varepsilon)d\mathbf{x}=1\quad j=1,\ 2,\ \cdots \tag{7.6.9}$$

规范化．

现在，对每个 g_j，(7.6.1)式(取 $\varepsilon=0$)简化为

$$\mathbf{b}\cdot\nabla g_j^0=\lambda_j^0 g_j^0, \tag{7.6.10}$$

这里上标号 0 表示在 $\varepsilon=0$ 处的值．能够证明[26] λ_1^ε 以 K/ε^2 按指数律趋向于零[注]，此处 K 为某个负常数．由此可以推知 g_1^0 的简化方程由下式给出：

$$\mathbf{b}\cdot\nabla g_1=0. \tag{7.6.11}$$

这样当 $\varepsilon\to0$ 时，

$$g_1(\mathbf{x},\ \varepsilon)\to C, \tag{7.6.12}$$

按(7.6.9)式，C 是一非零常数．把 (7.6.8) 式用到取 $u=1$ 时的(7.6.7)式，得到

$$\int_{\Omega}g_1(\mathbf{x},\ \varepsilon)g_j(\mathbf{x},\ \varepsilon)e^{-\psi(\mathbf{x})/\varepsilon^2}d\mathbf{x}=0\quad(j\geqslant2). \tag{7.6.13}$$

现在计算期望离出时间 $E_x\tau_\varepsilon$ 的渐近展开式，注意到对 $p_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$

[注] 注意这就是说 $\lambda_1^\varepsilon=O(e^{K/\varepsilon^2})$——译者注

的后向柯尔莫哥洛夫方程

$$L_\varepsilon p_\varepsilon = \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}, \text{ 在 } \Omega \text{ 中,}$$

$$p_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = 0, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \tag{7.6.14}$$

$$P_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

关于对 y 在 Ω 上和 t 在$[0, \infty)$上积分导出

$$\begin{aligned} L_\varepsilon v_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -1, \text{ 在 } \Omega \text{ 中,} \\ v_\varepsilon(\mathbf{x}) &= 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{aligned} \tag{7.6.15}$$

其中 $u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \int_\Omega p_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}\, dt$. 方程(7.6.15)与(5.4.5)相同，所以 $v_\varepsilon(\mathbf{x}) = E_\mathbf{x}\tau_\Omega$. 因此，(7.6.7)式蕴涵着

$$E_\mathbf{x}\tau^\varepsilon = \int_0^\infty \int_\Omega p_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}\, dt$$

$$\sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(\mathbf{x})}{\lambda_j^\varepsilon} \int_\Omega \phi_j(\mathbf{y})\, e^{-\psi(\mathbf{y})/\varepsilon^2} d\mathbf{y}.$$

特别，

$$E_0\tau^\varepsilon = \frac{\phi_1(\mathbf{0})}{\lambda_1^\varepsilon} \int_\Omega \phi_1(\mathbf{y}) e^{-\psi(\mathbf{y})/\varepsilon^2} d\mathbf{y}$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\phi_j(\mathbf{0})}{\lambda_1^\varepsilon} \int_\Omega \phi_j(\mathbf{y}) e^{-\psi(\mathbf{y})/\varepsilon^2} d\mathbf{y}. \tag{7.6.16}$$

现在，由(7.6.14)式可知对 $j \geqslant 2$, $g_j(\mathbf{0}) \to 0$, 对 $j \geqslant 2$, $\lambda_j^\varepsilon > 0$ 并且

$$\int_\Omega C_j^2(\varepsilon) e^{-\psi(\mathbf{y})/\varepsilon^2} d\mathbf{y} = 1, \tag{7.6.17}$$

它是由(7.6.6), (7.6.8)和(7.6.9)式引出的，所以我们有

$$E_0\tau^\varepsilon \sim (\lambda_j^\varepsilon)^{-1} \phi_1(\mathbf{0}) \int_\Omega \phi_1(\mathbf{y}) e^{-\psi(\mathbf{y})/\varepsilon^2} d\mathbf{y}. \tag{7.6.18}$$

最后，对 (7.6.16)式利用(7.6.6), (7.6.8)和(7.6.12)式，得到

$$E_0\tau^{\varepsilon}\sim(\lambda_1^{\varepsilon})^{-1}. \tag{7.6.19}$$

为求 $E_0\tau^{\varepsilon}$ 的渐近表达式，亦即求 λ_1^{ε} 的渐近表达式，我们导出下列边值问题的渐近展开式的首项：

$$L_{\varepsilon}v=\varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_i}=g(\mathbf{x}), \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{7.6.20}$$

$$v=0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{7.6.21}$$

此问题对 $g\equiv-1$ 简化成(7.6.15)式．由极大值原理，可知(7.6.20)和(7.6.21)式的解以 $e^{K/\varepsilon^2}\max_{\Omega}|g(\mathbf{x})|$ 为界，其中 K = 正常数．此外，形如(7.6.20)和(7.6.21)式的简单例子表明解确实能够增大至 e^{K/ε^2}．因此，用下式改变方程(7.6.20)及(7.6.21)的解 $v_{\varepsilon}(x)$ 的形式，即令

$$V_{\varepsilon}(\mathbf{x})=e^{-K/\varepsilon^2}v_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \tag{7.6.22}$$

K 待后选择．我们注意到 $v_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 对 ε^2 是 $O(1)$，且满足用 $e^{-K/\varepsilon^2}g(\mathbf{x})$ 代替 $g(\mathbf{x})$ 时的方程(7.6.20)和(7.6.21)式，然后如第 7.4 节那样推导出 $V_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 展开式中的首项

$$v_{\varepsilon}\sim C_0(1-e^{\zeta/\varepsilon^2}) \tag{7.6.23}$$

常数 C_0 如上述那样确定．

这样，$v_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 一致展开式中的首项为

$$v_{\varepsilon}(\mathbf{x})\sim C_0(\varepsilon)e^{K/\varepsilon^2}(1-e^{\zeta/\varepsilon^2}). \tag{7.6.24}$$

如上所述，在 Ω 上积分(7.6.20)和(7.6.21)式并运用散度定理，得到

$$\varepsilon\int_{\partial\Omega}e^{-\psi/\varepsilon^2}w_0\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial\mathbf{n}}dS_{\mathbf{y}}=\int_{\Omega}e^{-\psi/\varepsilon^2}w_0 g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{7.6.25}$$

(见第 7.4 节)．然后把(7.6.24)式代到(7.6.25)式中，得到

$$\int_{\partial\Omega} e^{-\psi/\varepsilon^2} w_0 \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS_y = \frac{e^{-K/\varepsilon^2}}{C_0(\varepsilon)} \int_\Omega e^{-\psi/\varepsilon^2} w_0 g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{7.6.26}$$

我们近似地估计这些积分，并观察到(7.6.26)式左(右)边的主要贡献来自于$\psi=\hat{\psi}$的点[来自原点，这里$\psi(\mathbf{0})=0$是Ω中ψ的极小值]. 因此，我们选择$K=\hat{\psi}$并求得

$$C_0(\varepsilon) = \frac{(\sqrt{2\pi}\,\varepsilon)^n g(\mathbf{0})}{H^{1/2}(\mathbf{0}) \int_{\partial\Omega} e^{-(\psi-\hat{\psi})/\varepsilon^2} w_0 \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS_y}, \tag{7.6.27}$$

这里
$$H(\mathbf{0}) = \det \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}.$$

现在对于第7.4节中(i)～(iii)的每一种情况，估计(7.6.27)式中拉普拉斯型积分，然后计算$C_0(\varepsilon)$，并且计算$v_\varepsilon(\mathbf{x})$当$\varepsilon\to 0$时的渐近表达式. 这样，得到在(i)的情况下，有

$$C_0(\varepsilon) = \frac{(\sqrt{2\pi}\,\varepsilon)^n g(\mathbf{0})}{H^{1/2}(\mathbf{0}) \int_U w_0 \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS_y}, \tag{7.6.28}$$

在(ii)的情况下，有

$$C_0(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon g(\mathbf{0})}{H^{1/2} \sum_{k=1}^{m} H_k^{-1/2} w_0\, \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{0}_k)}, \tag{7.6.29}$$

和在(iii)的情况下，有

$$C_0(\varepsilon) = \frac{2\pi \varepsilon^{(2k-1)/k} g(\mathbf{0})}{\Gamma\left(\frac{1}{2K}\right) H^{1/2}(\mathbf{0}) \sum_{i=1}^{l} d_i w_0\, \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(s_i)}, \tag{7.6.30}$$

这里$\Gamma(z)$是Γ函数.

至此为止，我们已求得$v_\varepsilon(\mathbf{x})$的展式的首项(7.6.24)式，但其中的$C_0$由(7.6.28)～(7.6.30)式中之一给定，因此在$g\equiv -1$的情况下，利用等式$v_\varepsilon(\mathbf{x})=E_{\mathbf{x}}\tau^\varepsilon$，计算期望离出时间的首项. 于

是有

$$E_x\tau^\varepsilon \sim \begin{cases} -\dfrac{(\sqrt{2\pi}\,\varepsilon)^n e^{\hat{\psi}/\varepsilon^2}(1-e^{\zeta/\varepsilon^2})}{H^{1/2}(\mathbf{0})\int_\Gamma w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{v}dS_y} & \text{对情况(i)},\\ -\dfrac{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon e^{\hat{\psi}/\varepsilon^2}(1-e^{\zeta/\varepsilon^2})}{H^{1/2}(\mathbf{0})\sum\limits_{k=1}^{m} H_k^{-1/2}w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{v}|_{Q_k}} & \text{对情况(ii)},\\ -\dfrac{2\pi e^{(2k-1)/k}e^{\hat{\psi}/\varepsilon^2}(1-e^{\zeta/\varepsilon^2})}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2K}\right)H^{1/2}(\mathbf{0})\sum\limits_{i=1}^{l} d_i w_0\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{v}|_{s_i}} & \text{对情况(iii)}. \end{cases}$$

(7.6.31)

最后，根据(7.6.19)式，λ_1^ε 的渐近形式可取(7.6.31)式中的倒数得到．注意到期望离出时间(主特征值)当 $\varepsilon\to0$ 时，按指数律递增(递减)．另外，出现在化学反应速率中的特征值问题在第8.6节中讨论．

习题 7.6.1

求问题

$$\varepsilon y''-xy'=g(x),\quad 在(a,\ b)中,$$
$$y(a)=y(b)=0,\quad (a<0<b)$$

的解 $y_\varepsilon(x)$ 的渐近展开式。

习题 7.6.2

推导出(7.6.23)式。

习题 7.6.3

在遗传学中，在有随机大选择的情况下，考虑 Wright-Fisher 模型的扩散逼近．当 $N\to\infty$ 时，取 $s=O(1)$，并且写出渐近福克尔-普朗克方程(见第5.2节)。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x(1-x)p]+4N\sigma\frac{\partial}{\partial x}[(2x-1-a)(1-x)p]=4N\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$(0\leqslant x\leqslant 1),\ t\geqslant 0,\ -1\leqslant a\leqslant 1,\ \sigma\geqslant 0.$$

展开
$$p(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}f_n(2x-1)$$

或
$$p(x,\ t)\sim e^{-\lambda_1 t}f_1(2x-1).$$

求当 $N\to\infty$ 时 λ_1 的渐近形式[71].

习题 7.6.4

考虑建立在如下假设上的捕食者–被捕食者的相互作用:

(i) 每一种群的出生率与群体的大小成正比.

(ii) 因食物短缺造成的死亡率与群体的平方成正比.

(iii) 被捕食者的死亡率与被捕食者群体的大小及捕食者群体的大小成比例,同样,捕食者出生率也有这种比例关系.

对捕食者–被捕食者群体的演变, 构造确定性模型, 并且求群体当 $t\to\infty$ 时的渐近状态. 特别, 若 $x(t)$ 与 $y(t)$ 分别是被捕食者群体与捕食者群体在时间 t 时的大小,则有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax-bx^2-cxy\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=Ay-By^2+Cxy\end{cases}\tag{7.6.32}$$

在(7.6.32)式中加入“噪声”,并如此选择常数,使得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(1+\alpha-x-\alpha y)+\sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{x\,dw_1}{dt}\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=y(1-\alpha-y+x)+\sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{y\,dw_2}{dt}.\end{cases}\tag{7.6.33}$$

写出(7.6.33)式的福克尔–普朗克方程与后向柯尔莫哥洛夫方程. 为避免退化,作变量变换 $\xi=\log x,\ \eta=\log y$. 证明“拟位势”ϕ为

$$\phi(\xi,\ \eta)=2(e^{\xi}-\xi-1+e^{\eta}-\eta-1).$$

用 $\xi>\eta_1,\ \eta>\eta_1$ 定义 Ω, 并对小 ε 计算期望离出时间和离出分布. 运用数值计算求 w_0[63,64].

习题　7.6.5

对于两个竞争种群的模型

$$\frac{dx}{dt}=x(1+\alpha-x-dy)$$

$$\frac{dy}{dt}=y(1+\alpha-y-\alpha x)$$

作类似的分析．运用数值积分求 ϕ 和 w_0[63,64]、

习题　7.6.6

利用 (5.4.6)，(7.6.19) 式和分离变量法，证明当 $\varepsilon \to 0$ 时 τ，变为一个指数分布的随机变量。

第八章　越势垒扩散

8.1　化学反应的扩散模型

分子内部的粒子是通过分子键来约制的，粒子可在其稳定的平衡状态附近作微小的振荡或停留在那里．在一个化学反应中，外力(例如分子碰撞)能激活粒子使其达到克服分子键的束缚力而与分子脱离．由这种如第二章中已描述过的随机碰撞所产生的随机力在数学上描述为"白噪声"．当然，这是一个物理过程在数学上的理想化(参看第 4.1 节)．白噪声的"强度"决定了反应物的温度．对于一个粒子来说，一旦它与分子脱离，那么它不是形成新的分子键而使其保持更平稳的状态就是从分子中以其他方式永久分离出去．图 8.1.1 就是描述了这样的情况．其中粒子 B 在克服高度为 E 的势垒后形成一新的更稳定的化学键．原先停留在势阱中的粒子受外力推动而越过势垒的速率决定了反应的动能．

如果粒子具有 n 个自由度，那么它的运动就可用 $2n$ 维相空间中的质点运动来描述，即可用 n 个独立的位移坐标

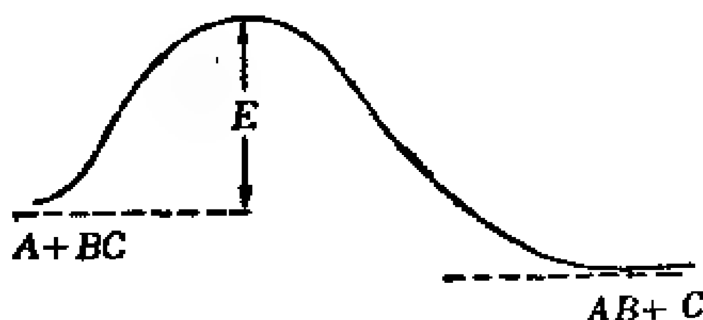


图 8.1.1　化学反应的势垒

$$\mathbf{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$$

和 n 个速度坐标 $\mathbf{y}=d\mathbf{x}/dt$ 来表示．限制粒子的势阱可包含一

系列孔穴和粒子在逃逸前要通过的势垒(见图 8.1.2). 这就是依次连续的化学反应的情况. 这里, 仅当粒子越过最高势垒以后的反应才可被认为是完全的. 当原始反应物越过最高势垒后便形成最终产品, 我们称原始反应物越过最高势垒之前必须获得的能量为**激活能**. 居间态的存在一般来说是无关紧要的, 除非这种状态包含所有分子的一个值得重视的部分, 这时, 这些分子构成初始状态的一个部分. 对于多原子分子来说, 势能是 n 个独立的关于原子核间距离的函数, 这些距离是从任意选取的原点开始测量的. 就这种情况而言, 在 R^n 中粒子越势垒可有许多逃逸方向, 这些不同的方向相当于不同的化学反应. 例如, 欲从 CH_3F 中分裂出三个等效的 H 原子中的任何一个, 那么都需要相同的激活能, 结果就产生了三个不同的反应[4,33].

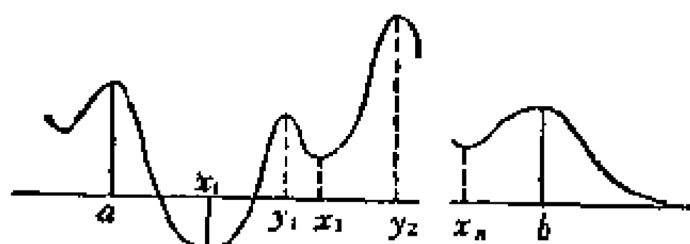


图 8.1.2 依次连续反应中的势能

最后, 如果势垒非常尖削, 如图 8.1.3 所示的那样, 那么我们可考虑突变力, 即一旦粒子超出束缚界限, 此时引力就突变为斥力. 以后我们将计算这种模型中关于粒子越势垒逃逸的速率, 从而一个作为势阱和温度的函数的激活能(即白噪声的"强度")就可得出. 特别, 我们将求出对反应速率和最终产物成分, 势阱的空间几何所产生的效应(图 8.1.4~8.1.7).

假定分子周围的媒质是处于热平衡状态, 于是由于随机碰

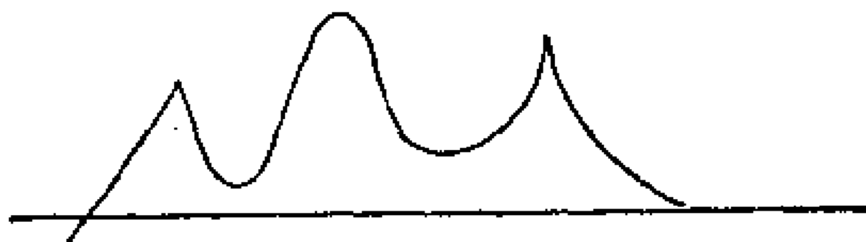


图 8.1.3 带有尖削边缘的势垒

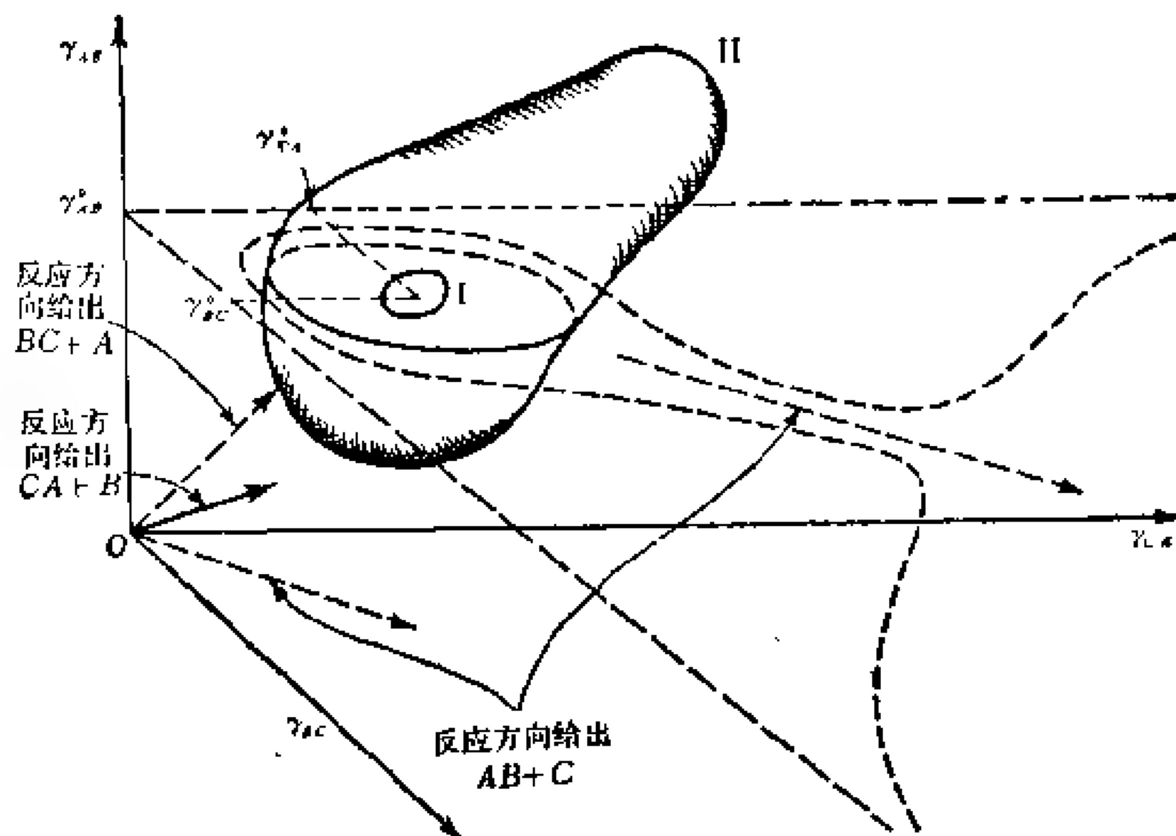


图 8.1.4 一个作为原子核间距离函数的三原子 ABC 分子的两个常势能曲面(I, II)[4]

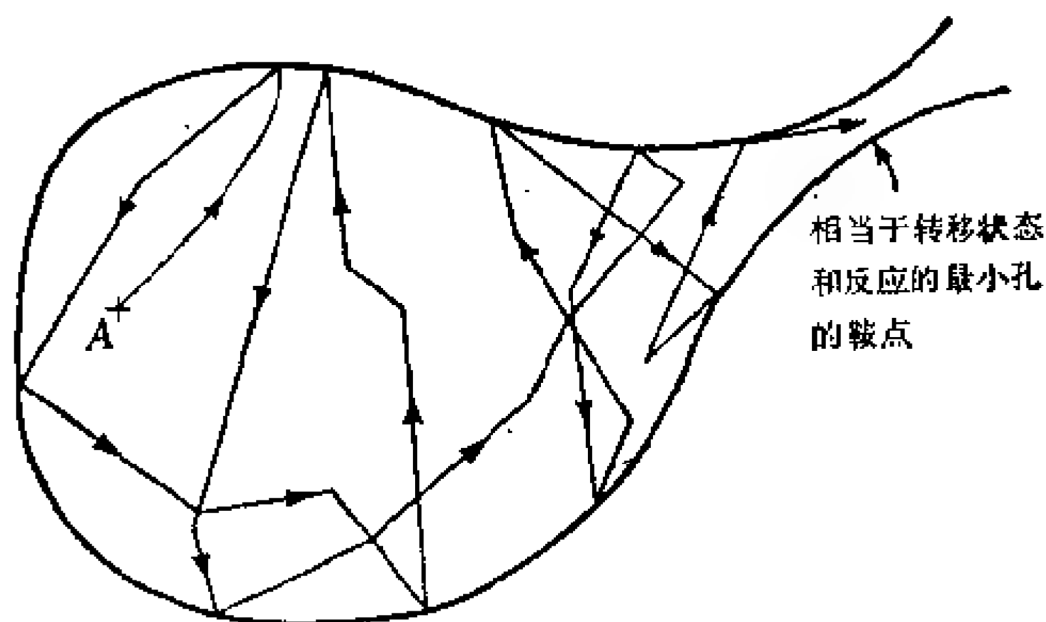


图 8.1.5 具有内部坐标的构空间中临界受激分子运动简图，这种分子具有单一的分解形式。边界曲面是一个常势能[4]

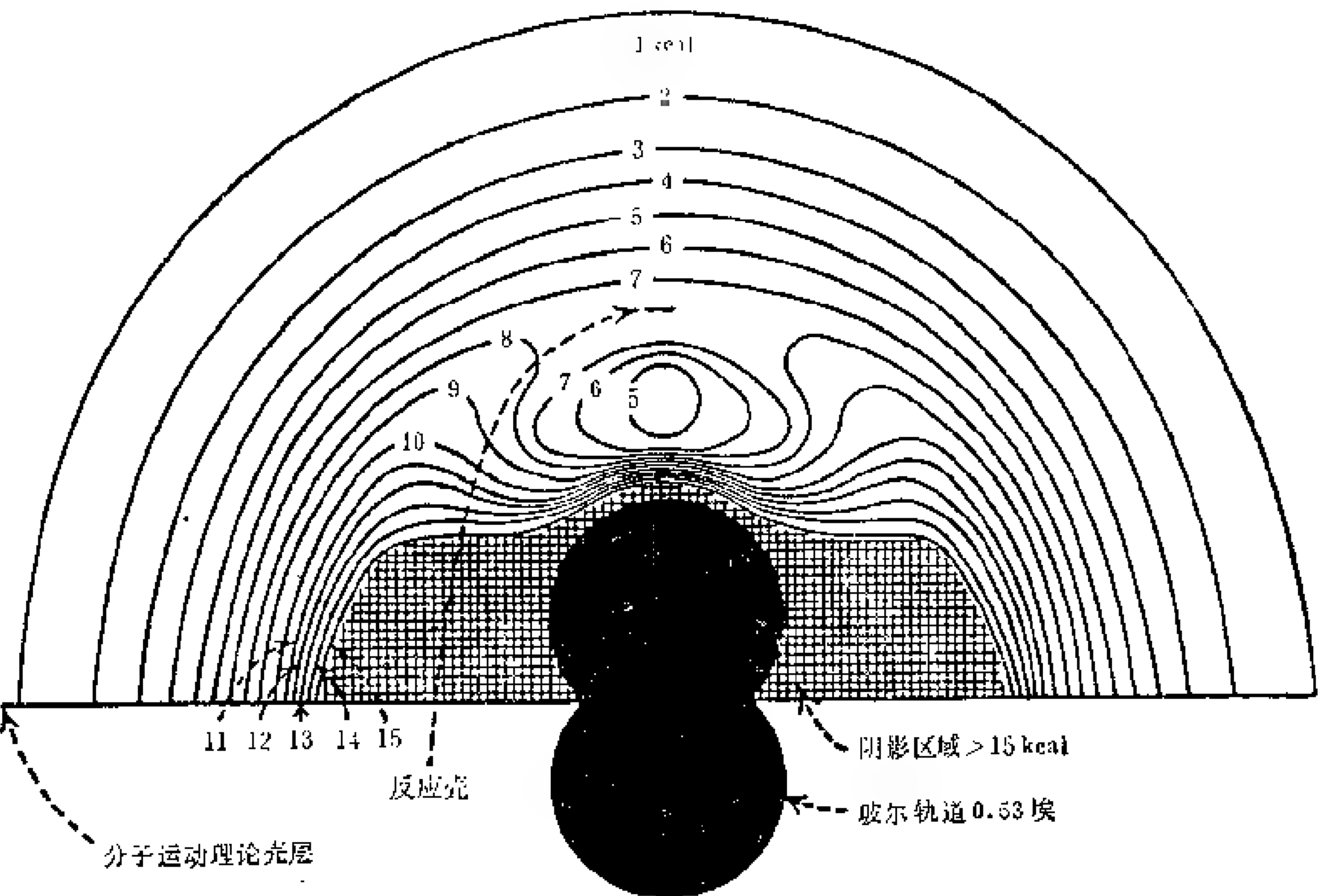


图 8.1.6　近似于刚性氢分子的氢原子的势能剖面图
（参看 Hirschfelder, Eyring 和 Topley 的文献）

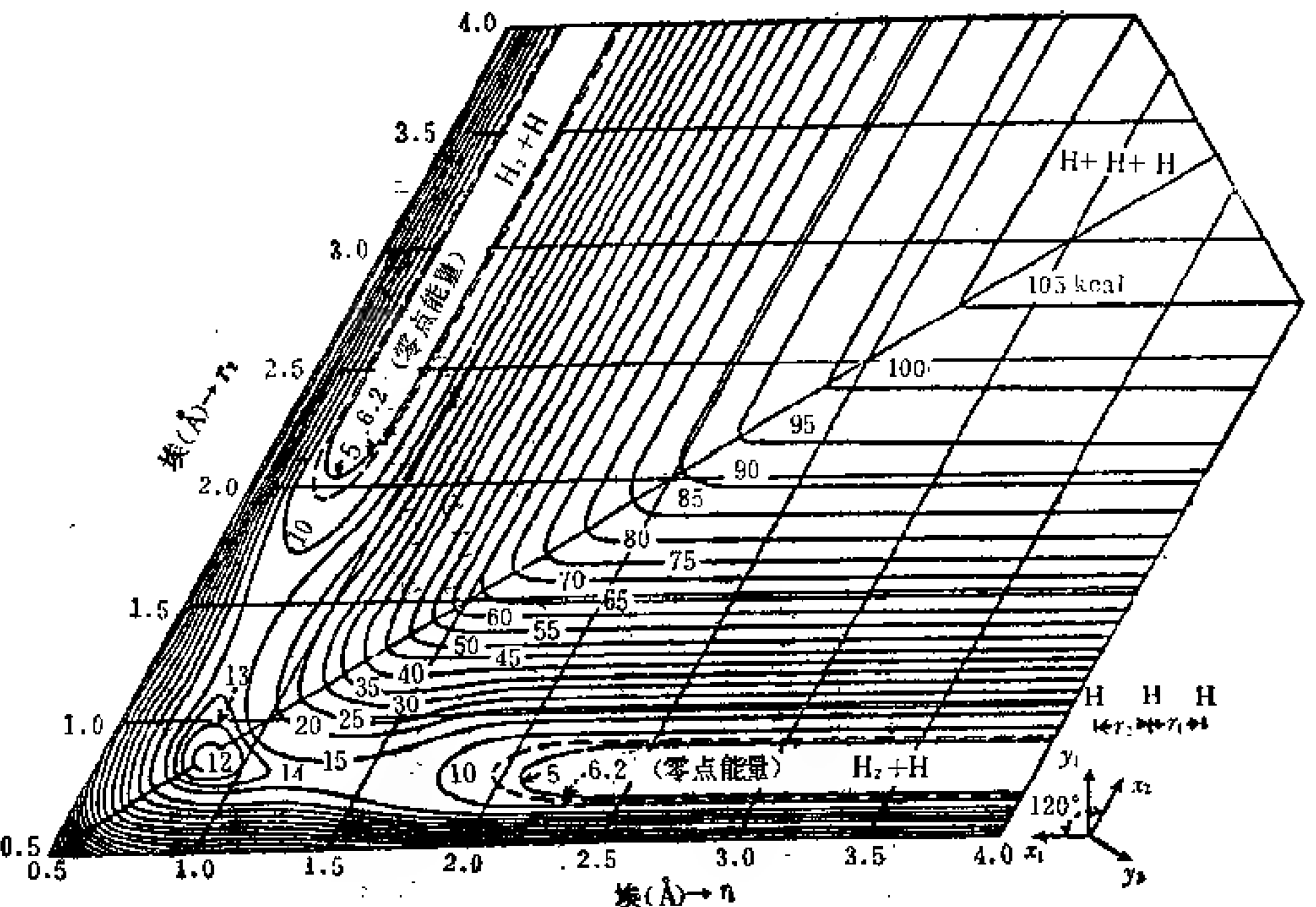


图 8.1.7　以 14% 库仑能量为基础的三个氢原子系统的势能曲面
(参看 Eyring、Gershinowitz 和 Sun 的文献)

撞而使得离子的速度在 $\mathbf{y}$ 的 n 个分量上服从麦克斯韦分布. 具体些说, 我们可用朗之万方程来描述一个质点的运动:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{y}$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=-\beta\mathbf{y}-\nabla\Phi(\mathbf{x})+\sqrt{\frac{2\beta kT}{m}}\dot{\mathbf{w}}$$

方程中的 $-\beta\mathbf{y}$ 项为单位质量的动态粘滞度, 它表明在媒质中运动的粒子被媒质粒子随机碰撞的减速率, 并可从斯托克司公式

$$\beta=6\pi a\eta/m$$

计算出来, 其中 a 为球半径, η 为粘滞系数, m 为碰撞的约化质量. 诸分子键是通过势函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 来进行描述的, 这个势函数仅依赖于这些分子的原子核间的距离(图 8.1.8). 式 $\sqrt{2\beta kT/m}\,dw$ 表示由分子碰撞所引起的白噪声力. 如果 β 很大(即如果在每个时间单位内发生许多次碰撞)则斯莫路苏斯基方程便是分子内部的粒子运动方程有效的近似式. 因此,

$$d\mathbf{x}=-\nabla\Phi(\mathbf{x})ds+\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,d\mathbf{w}(s) \qquad (8.1.1)$$

是基本方程, 其中 $\beta s=t$. 我们还假定势阱的深度(激活能)与温度值相比要大得多. 为了叙述更明确起见, 设 Ω 为势阱所占的区域, 并且假定

$$\min_{\Omega}\Phi=0, \quad \min_{\partial\Omega}\Phi=Q,$$

其中 $\partial\Omega$ 为势垒. 则置 $-\nabla\Phi=-Q\nabla\phi\equiv Q\mathbf{b}$, 且令 $s'=Qs$(即改变原来的时间尺度值 t 为 $\beta t/Q$), 我们便可得方程

$$d\mathbf{x}=b(\mathbf{x})dt+\varepsilon d\mathbf{w},$$

假设其中的 $\qquad \varepsilon=\sqrt{2kT/mQ}\ll 1$.

我们已使用了这样一个事实, 即如果 $\mathbf{w}$ 是一个布朗运动, 那么对任何常数 $C>0$, $w(C^2t)/C$ 也是一个布朗运动(见 (2.1.16)

式的(ii)). 从势的形状(见图 8.1.1)可清楚地知道，除了那种使得粒子离开边界 $\partial\Omega$ 的斥力以外，力 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 或者在 $\partial\Omega$ 上取零值，或者在 $\partial\Omega$ 的切线方向上取零值. 如果势函数在 $\partial\Omega$ 有尖点，那么 $\mathbf{b}$ 在 $\partial\Omega$ 上就不再为零了，而且 $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}<0$. 其中 $\boldsymbol{\nu}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向. 图 8.1.2 描绘了这样一个势场，其中点 $x_i(i=1, \cdots, n)$ 是稳定平衡状态，而点 $a, b, y_j(j=1, \cdots, k)$ 是不稳定状态(化学术语称为"转移状态").

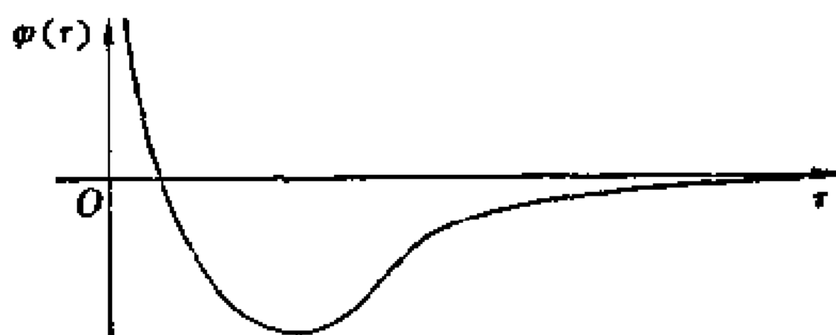


图 8.1.8　原子核间力的势

设 $\tau^\varepsilon=(\mathbf{x}, \varepsilon)$ 是(8.1.1)式的解 $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ 从 Ω 中的首次离出时间，即

$$\tau^\varepsilon=\inf\{t>0 \mid \mathbf{x}_\varepsilon(t)\in\partial\Omega,\ \mathbf{x}_\varepsilon(0)=\mathbf{x}\in\Omega\}.$$

势阱中粒子的平均离出时间 $\nu_\varepsilon(\mathbf{x})=E_{\mathbf{x}}\tau^\varepsilon$ 决定这个反应的速率

$$\varkappa=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\frac{\rho(\mathbf{x})}{\nu_\varepsilon(\mathbf{x})}\right]d\mathbf{x},$$

其中 $\rho(\mathbf{x})$ 为势阱中粒子的相对浓度. 我们假定最初所有粒子都集中于稳定平衡点 $\mathbf{x}_i$，于是

$$\varkappa=\frac{1}{2}\sum\frac{\rho(\mathbf{x}_i)}{E_{\mathbf{x}_i}\tau^\varepsilon}.$$

在一般情况下，如果大部分粒子集中于最深谷的底部，例如说位于 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 这一点，那么对于小数 ε 就有 $E_{\mathbf{x}_i}\tau^\varepsilon\sim E_0\tau^\varepsilon$，从而

$$\varkappa=\frac{1}{2}E_0\tau^\varepsilon.$$

这就是说反应速率 $\varkappa$，即粒子越势垒而逃逸的频率是粒子从势阱中平均逃逸时间倒数的一半．因子 $\frac{1}{2}$ 是达到 $\partial\Omega$ 的粒子穿过 $\partial\Omega$ 并进入 Ω 的补集的概率．化学运动方程中出现的常数 $\varkappa$ 如下．设 $C(t)$ 为一阶反应中给定的反应物的浓度，那么基本方程为[4]

$$\frac{\partial C(t)}{dt}=-\varkappa C(t).$$

阿尔海纳斯于 1894 年第一次给出了 $\varkappa$ 依赖于温度和激活能的计算公式，以后，这个公式又得到了显著的改进．在势垒是光滑的情况下 $E_0\tau^\varepsilon$ 的计算方法将在第 8.3 节中给出．至于具有尖削势垒的情况在第七章中已作了计算．

我们将要说明的是 $\varkappa$ 可由修正的阿尔海纳斯定律得到．这个修正表明了定向效应，也就是说，对于不同方向的碰撞，激活分子的概率也不同．它构成了阿尔海纳斯定律中被认为是很难想象的“位阻因素”的计算理论，这个理论同样也给出了由于位阻效应而在不同方向上所发生的各种可能反应的比率．最后，值得一提的是克拉美于 1940 年首次在一维情况下按类似的模型计算出了反应速率．他考虑了福克尔-普朗克（前向）方程．当然，一维的情况是没有位阻效应的．

在大多数化学反应的仿真模型中，我们需假定粒子被限制于一无限深的势阱之中，且假定反应是由粒子从一个稳定平衡点转移到另一个更稳定的平衡点组成．在转移中，粒子在实现其稳定状态之前可通过几个其他的平衡状态．我们可用具有势 Φ 的斯莫路苏斯基-克拉美方程(8.1.1)来描述这一情况，其中势函数 Φ 有几个极小值，且当 $|\mathbf{x}|\to\infty$ 时，$\Phi(\mathbf{x})\to\infty$．斯莫路苏斯基方程(8.1.1)的解 $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ 的转移概率密度 $p_\varepsilon(x, x_0, t)$ 表示相对势函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 而言的空间中参加反应的粒子的密度．因此

$$P(\mathbf{x}, t)=\int p_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

就表示在不同反应阶段粒子的比例，每个反应阶段可由在时间 t 的坐标 $\mathbf{x}$ 来确定，反应的初始分布给定为 $f(\mathbf{x})$. 密度 $p_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t)$是相对于(8.1.1)式的福克尔-普朗克方程的解，即方程

$$Lu=\varepsilon\Delta u+\nabla\cdot(\nabla\phi u)=u_t,\quad \mathbf{x}\in R^n,\ t>0,$$
$$u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t)\to\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\quad 当\ t\to\infty\ 时 \tag{8.1.2}$$

的平稳解为 $$u^0(\mathbf{x})=e^{-\phi/\varepsilon}\Big/\int e^{-\phi/\varepsilon}d\mathbf{x},$$

它描述了反应产物的最终分布，方程的完全解 $u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t)$可写成特征函数的展开式，即

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t)$$
$$=u^0(\mathbf{x})+e^{-\phi(\mathbf{x}_0)/\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)u_n(x_0)e^{\lambda_n t},$$

其中 λ_n 是问题

$$Lu=\lambda u \tag{8.1.3}$$

的特征值，$u_n(\mathbf{x})$是对应的特征函数. 这里 L 是方程(8.1.2)中所定义的算子. 平稳解 $u^0(\mathbf{x})$是对应于特征值 λ_0 的特征函数. 于是特征值 λ_1 就决定了反应速率，所以，我们一定有 $\varkappa=\lambda_1$. 在第8.6节中我们还将证明 $\tau=1/\lambda_1$ 是在沿通向势阱中最深处的路径上所取的一粒子越过其最高势垒的平均时间.

8.2 晶体中的原子迁移

晶体是原子呈周期性模式排列的晶格，它是由通过原子间作用力相互牵制的相等的晶胞组成(见图 8.2.1 和 8.2.2). 通常一些杂质会掺入到晶体中. 杂质的诸原子被置于间隙位置并且通过挤压它们通路周围的原子而穿过晶体进入附近的新的间

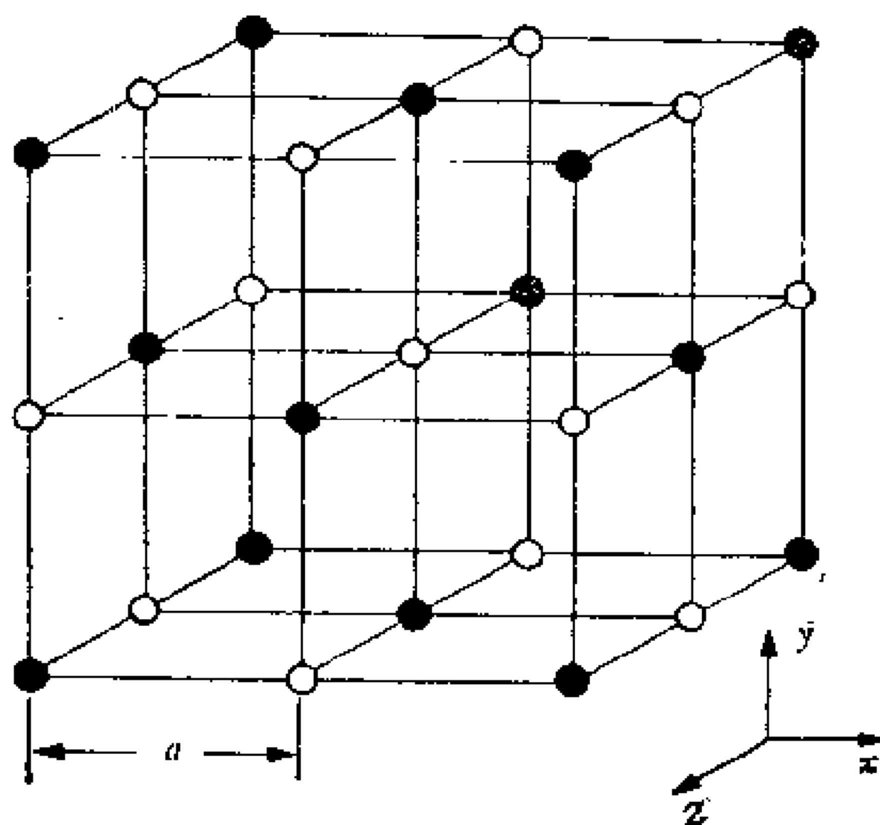


图 8.2.1 氯化钠结构[31]

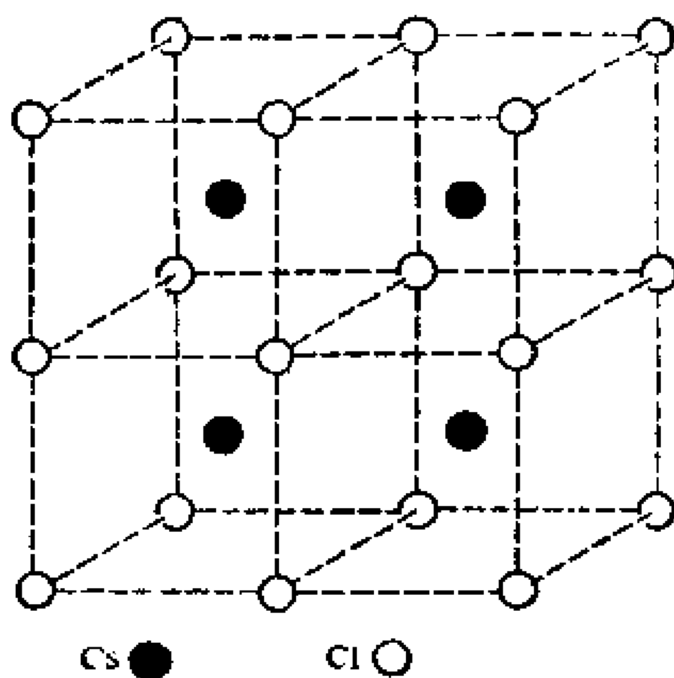
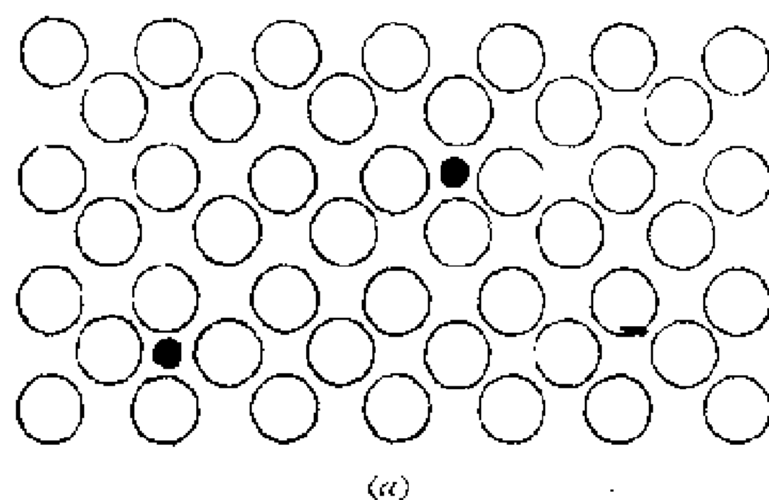
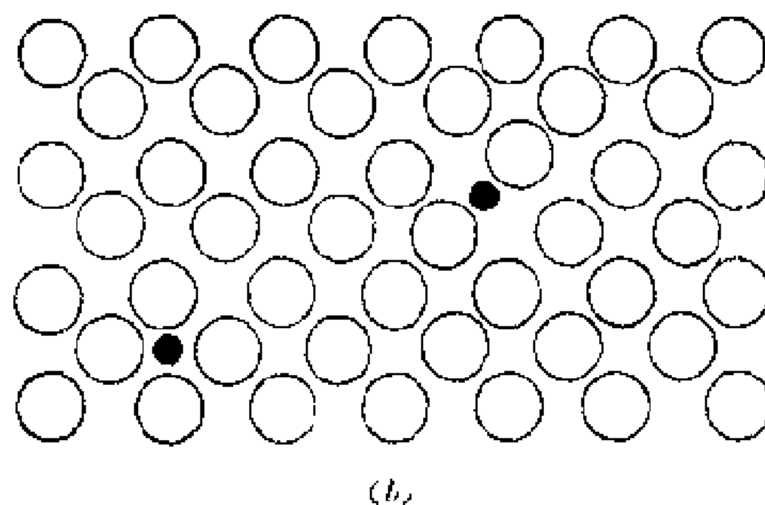


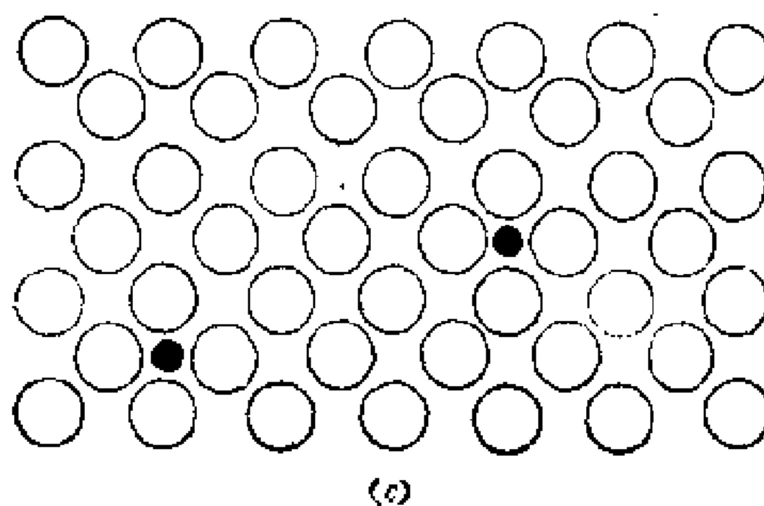
图 8.2.2 氯化铯结构[31]



(a)



(b)



(c)

图 8.2.3 (a)在原子的跳跃之前的单原子晶体中的杂质原子；(b)激活状态的杂质原子；(c)在原子的跳跃之后的单原子晶体中的杂质原子[81]

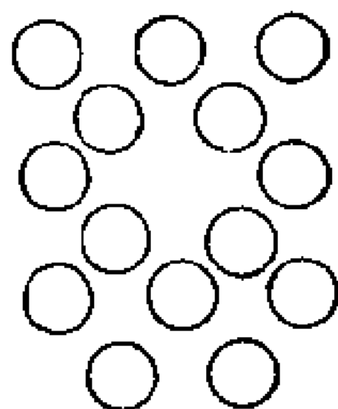


图 8.2.4 空位[31]

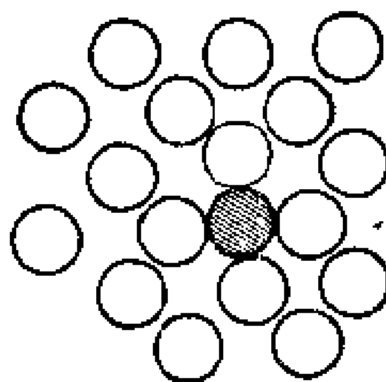


图 8.2.5 (参看[31])

隙位置(图 8.2.3). 我们的目的是在于描述这类杂质通过晶体点阵的迁移. 当晶体点阵中产生晶体缺陷时也有这样的类似现象发生. 在一个纯晶体中, 最重要的一种点缺陷是称之为空位的点阵空位(图 8.2.4). 点缺陷的另一种类型是纯材料的一个原子, 这个原子不在点阵位置而在间隙位置(图 8.2.5). 例如, 受到辐射的核反应堆屏蔽物的金属点阵中产生这种缺陷. 这种空位的产生和迁移会引起膨胀和其他金属物理性质的变化.

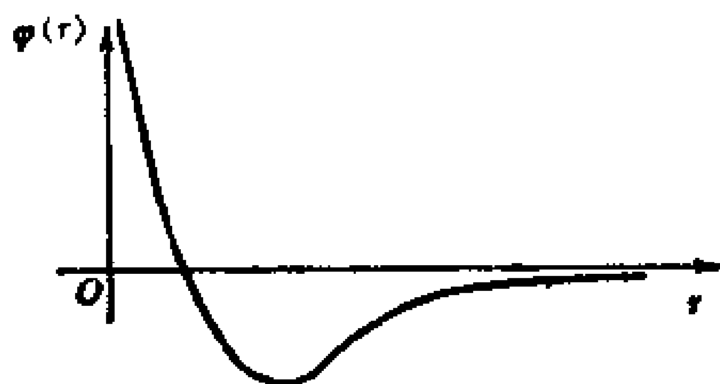


图 8.2.6 原子核间力的势

如果点阵原子是驻定的, 那么间隙中的粒子或空位将在原子力的势阱底部受到束缚而静止(见图 8.2.6). 然而, 晶体中的诸原子不是驻定的, 它们在其平均位置周围作微小的随机振荡, 这些振荡的强度决定了晶体的温度. 尽管对一特定的原子来说其振荡的振幅在绝大多数时间内是很小的, 但有时该原子也可得到足够的能量以大幅度地增加其振幅. 对于原子振幅中的热涨落, 虽然很少发生但它有时可通过原子振荡的周期来确定, 它可能会引起间隙原子或空位

跳过势阱的边缘且被抑制在下一个势阱之中．势阱间连续的跳跃就在点阵中形成了间隙粒子或空位的随机游动，即布朗运动．设这种涨落或跳跃之间的平均时间为 $\bar{\tau}$，又设点阵中两个相邻间隙位置之间的距离为 a．那么在一个立体点阵中，间隙粒子或空位将在时间区间 $\bar{\tau}$ 内（即跳跃频率为 $1/\bar{\tau}$）构成一个跳跃度为 a 的三维随机游动．改变空间变量和时间变量的尺度，以使时间的基本单位为 $\bar{\tau}$，空间的基本单位为晶格的尺度 a．这样，杂质原子的转移概率密度就能用如第 2.2 节中所叙述过的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\alpha a^2}{\bar{\tau}}\Delta u\equiv D\Delta u \tag{8.2.1}$$

来描述．

表示布朗运动的粒子从势阱中平均逃逸时间的量 $\bar{\tau}$ 需根据晶体的性质来确定．对于全部六个方向的跳跃是均等的立方体结构来说，常数 α 等于 1/6．在那些不同于六种跳跃方向的结构中，α 就取不同的数值了．另外，如果对于不同方向上的跳跃具有不同的可能性，那么，扩散是各向异性的且 D 为矩阵．扩散方程中的拉普拉斯算子就由更一般的二阶椭圆型算子所代替．我们将要计算扩散矩阵，且证明它与温度、晶体的结构以及与其他一些物理参数有关．了解了扩散系数，我们便能确定晶体的某些重要物理性质．例如离子性晶体的电导率 σ 可由纳恩斯特–爱因斯坦(Nernst–Einstein)公式确定，即

$$\sigma=\frac{Cq^2D}{kT},$$

其中 D 为扩散系数，C 表示间隙的浓度与原子百分率的比率，q 为电量，T 为温度，k 为玻尔兹曼常数[31]．在第 8.7 节中将给出由斯莫路苏斯基方程导出的纳恩斯特–爱因斯坦公式．

通过计算平均逃逸时间 $\bar{\tau}$ 以及逃逸方向的概率分布，我们提出这样一个模型来描述晶格中间隙粒子或空位的随机游动．这个模型类似于一个化学反应速率模型，其中随机运动是由于反应物和媒质周围的分子之间的随机碰撞所引起的．而在我们提出的模型中，随机运动是由于晶体点阵中的热振动所产生的．我们把每个点阵原子作为布朗谐振荡器来考虑，使得它们的速度分布是均值为零、方差为 kT/m 的正态分布(参见第2.1节)．

所以，间隙原子的运动取决于斯莫路苏斯基微分方程

$$d\mathbf{x}=-\nabla\Phi(\mathbf{x})dt+\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,d\mathbf{w}(t), \qquad (8.2.2)$$

其中 $\mathbf{x}$ 是间隙的位移，Φ 是束缚间隙固定在其位置上的原子力的势．为了描述空位的迁移，我们引入另一种模型，在这个模型中将把由 N 个原子组成的点阵作为 $3N$ 维位形空间中的一个点来考虑，每个点阵的平衡状态是点阵束缚力的势能 Φ 的极小值．因此，势能 Φ 是具有 n 个独立坐标(n个自由度)的函数．这样，空位的迁移就对应一个 n 维布朗运动粒子从一个势阱到另一势阱的跳跃，关于 $\mathbf{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$ 的方程(8.2.2)就描述了这个情况．以下我们将叙述适用于这两种模型的数学方法．

为了确定关于非各向同性晶体点阵(例如锌或如图8.2.7所示的点阵)的扩散张量，我们注意到各个不同方向上的跳跃频率是不相同的，且通过连接势阱的鞍点的概率在各个不同的方向上也是不同的．举例来看：在$(x,\ y)$平面上的扩散系数就与 z 方向的扩散系数不同，从而扩散方程便可写成下面这种形式：

$$D_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+D_2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (8.2.3)$$

正由于$(x,\ y)$平面上的跳跃频率与 z 方向上的跳跃频率不同，

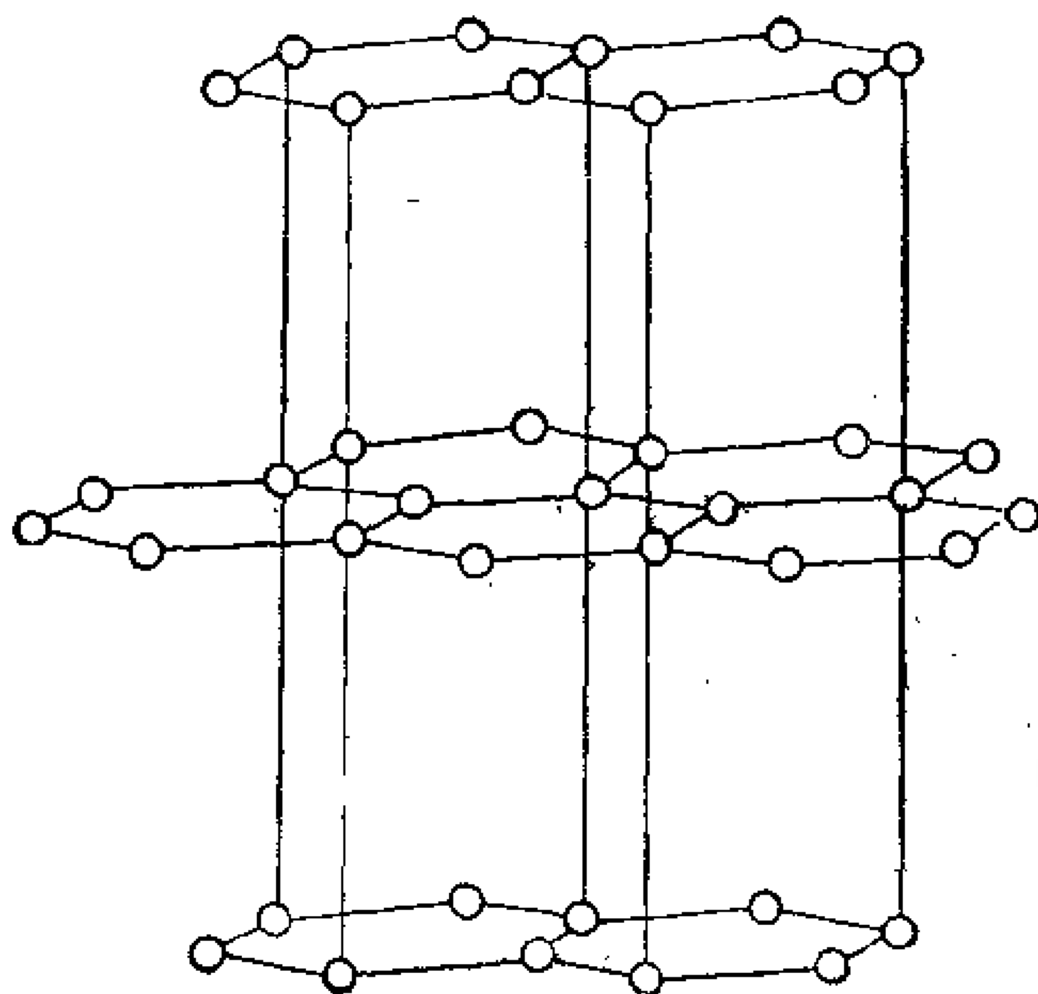


图 8.2.7　石墨结构[31]

这就引起了 D_1 与 D_2 值的不同．另外，跳跃程度的差异以及跳跃概率的不同也可引起扩散系数 D_1 与 D_2 值的不同．对于最后这种情况，我们可通过一个例子来更好地说明．考虑这样一个点阵：该点阵中的间隙原子沿六种可能路径中的一条从一个晶胞移至另一个晶胞，如图 8.2.8 所示．设沿带有一条、二条、三条影线标记的线段的跳跃概率分别为 p，q 和 r．因此有 $2(p+q+r)=1$．关于这种随机游动的转移概率的后向柯尔莫哥洛夫方程为

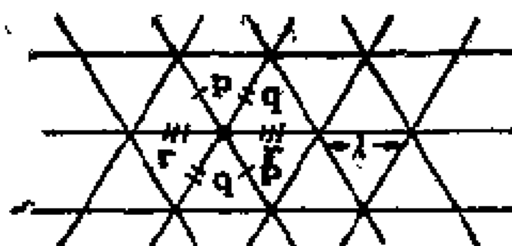


图 8.2.8　非各向同性点阵

$$
\begin{aligned}
&P(x,\ y,\ a,\ b,\ (n+1)\bar{\tau}) \\
&\quad = r[P(x,\ y,\ a+\lambda,\ b,\ \bar{\tau}n)+P(x,\ y,\ a-\lambda,\ b,\ \bar{\tau}n)] \\
&\qquad + p\left[P\left(x,\ y,\ a+\frac{1}{2}\lambda,\ b+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\ \bar{\tau}n\right)\right. \\
&\qquad \left. + P\left(x,\ y,\ a-\frac{1}{2}\lambda,\ b-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\ \bar{\tau}n\right)\right] \\
&\qquad + q\left[P\left(x,\ y,\ a-\frac{1}{2}\lambda,\ b+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\ \bar{\tau}n\right)\right. \\
&\qquad \left. + P\left(x,\ y,\ a+\frac{1}{2}\lambda,\ b-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\ \bar{\tau}n\right)\right].
\end{aligned}
$$

其中 $P(x,\ y,\ a,\ b,(n+1)\bar{\tau})$ 表示点阵经过相隔时间为 $\bar{\tau}$ 的 $n+1$ 次跳跃后到达点 $(x,\ y)$ 的概率，已知粒子的初始点在 $(a,\ b)$. 因此有

$$
\begin{aligned}
&P(x,\ y,\ a,\ b,\ \bar{\tau}(n+1))-P(x,\ y,\ a,\ b,\ \bar{\tau}n) \\
&\quad = P_t(x,\ y,\ a,\ b,\ \bar{\tau}n)\bar{\tau}+o(\bar{\tau}) \\
&\quad = \lambda^2\left[P_{aa}(x,\ y,\ a,\ b,\ \bar{\tau}n)\left(r+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q\right)\right. \\
&\qquad + P_{ab}(x,\ y,\ a,\ b,\ \bar{\tau}n)\frac{\sqrt{3}}{2}(p-q) \\
&\qquad \left. + P_{bb}(x,\ y,\ a,\ b,\ \bar{\tau}n)\frac{3}{2}(p+q)\right]+o(\lambda^2).
\end{aligned}
$$

这样
$$
\begin{aligned}
\frac{\tau}{\lambda^2}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2}+r\right)+\sqrt{3}(p-q)\frac{\partial^2 P}{\partial a\partial b} \\
+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-r\right)\frac{\partial^2 P}{\partial b^2},
\end{aligned}
$$

或
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\lambda^2}{\bar{\tau}}\left[\frac{1/2+r}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial a^2}+\sqrt{3}(p-q)\frac{\partial^2 P}{\partial a\partial b}\right. \\
\left. +\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-r\right)\frac{\partial^2 P}{\partial b^2}\right].
\end{aligned}
$$

所以，扩散张量便为这样的形式：

$$D=\frac{\lambda^2}{\tau}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+r\right) & \frac{\sqrt{3}}{2}(p-q)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(p-q) & \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-r\right)\end{bmatrix}.$$

在坐标主轴上，D 如下给定：

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix},$$

其中 λ_1 和 λ_2 为上述矩阵的两个相异特征值. 这个例子表明，不同方向上的扩散系数可以不同. 然而，事实上在六角点阵平面内部的非各向同性的效应用实验是不能观察到的，它们只能在其他点阵(如正交点阵)中被观察到.

在一般情况下，我们总设一个初始位于原点的粒子能够跳跃的可能位置为向量

$$\mathbf{z}_k=(z_k^1,\ z_k^2,\ z_k^3)^T \quad (k=1,\ \cdots,\ 2n).$$

并进一步假定跳跃发生于间隔为 τ 的时间区间内，且概率分别为 $p_1,\ \cdots,\ p_{2n}$，其中

$$\sum_i p_i=1.$$

那么随机游动的转移概率满足后向方程

$$P(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ (n+1)\tau)=\sum_{j=1}^{2n}P(\mathbf{x}+\mathbf{z}_j,\ \mathbf{y},\ n\tau)p_j, \tag{8.2.4}$$

其中 $\quad \mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T,\quad \mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^T.$

然后，分别对(8.2.4)式左右两边用泰勒级数关于 $n\tau$ 和 $\mathbf{x}$ 进行展开并仅取首项，便得

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{3}D_{ij}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\partial x_j},$$

其中 $t=n\tau$，且

$$D_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k z_k^i z_k^j}{\bar{\tau}}. \tag{8.2.5}$$

以上我们利用了 $\mathbf{z}_{n+j}=-\mathbf{z}_j$ 和

$$p_{n+j}=p_j(j=1, \cdots, n)$$

这一事实，它是由点阵的周期性所得出的，这样就可消去一阶空间导数. 因而离出点以及期望离出时间的分布就决定了点阵中的扩散矩阵. 有关它们量值方面的计算将在第 8.6 节和第 8.7 节中给出.

8.3 一维离出问题和多重转移状态

我们考虑一维的随机微分方程

$$dx=b(x)dt+\sqrt{2\varepsilon}\,dw$$

并且令

$$b(x)=-\frac{d}{dx}\Phi(x).$$

我们的目的是计算离出点的离出分布. 更明确地说，就是在初始分布给定的情况下，计算在 a 点和 b 点离开 $\Omega=(a, b)$ 的粒子的比例. 在此情况下，方程(5.4.8)如下给定:

$$\varepsilon u_\varepsilon''+b(x)u_\varepsilon'=0,$$

$$u_\varepsilon(a)=\alpha, \quad u_\varepsilon(b)=\beta. \tag{8.3.1}$$

如果取 $\varepsilon=0$, 那么，简化方程(8.3.1)的解在 $b(x)\neq 0$ 的区间上一定是常数. 因此，当 $\varepsilon\to 0$ 时，内层仅能在 $b(x)$取零值附近显示. 所谓内层即指这样一个区域，在该区域中方程(8.3.1)的解迅速地从一个常数变化到另一个常数. 我们首先确定 $b(x)$的哪些零点是内层位置.

设 z_i 为 $b(x)$的零点，假定 $b(x)$在 $x=z_i$ 附近的泰勒级数展开式为

$$b(x)=A_i(x-z_i)^{k_i}+\cdots.$$

令 $$\xi=(x-z_i)/\varepsilon^{\alpha_i},$$

于是我们在 $x=z_i$ 的邻域内引进了一个伸缩变换. 这样, 方程(8.3.1)便变为

$$\varepsilon^{1-2\alpha_i}u_{\xi\xi}+[A_i\varepsilon^{\alpha_i(k_i-1)}\xi^{k_i}+\cdots]u_\xi=0. \qquad (8.3.2)$$

取 $$\alpha_i=1/(k_i+1),$$

我们就可看到 u_ε 关于 $\xi=0$ 的内层展开式中的首项 u^0 满足方程

$$u^0_{\xi\xi}+A_i\xi^{k_i}u^0_\xi=0. \qquad (8.3.3)$$

由于当 $z_i<x<z_{i+1}$ 时

$$u_\varepsilon(x)\to C_i,$$

因此, 相应的条件蕴涵着当 $\xi\to-\infty$ 时

$$u^0(\xi)\to C_{i-1}$$

和当 $\xi\to\infty$ 时 $$u^0(\xi)\to C_i.$$

方程(8.3.3)的解由下式给定:

$$u^0(\xi)=\gamma_1\int_0^\xi \exp\left(-\frac{A_i\xi^{k_i+1}}{k_i+1}\right)d\xi+\gamma_2, \qquad (8.3.4)$$

其中 γ_1 和 γ_2 是两个待定常数. 如果 k_i 为偶数, 那么除 $\gamma_1=0$ 外; 当 $\xi\to\infty$ 或 $\xi\to-\infty$ 时均有 $|u^0(\xi)|\to\infty$. 又因为

$$C_{i-1}=C_i=\gamma_2,$$

所以 $\gamma_1=0$ 且没有内层发生. 如果 k_i 为奇数并且 $A_i<0$ 也可得出同样的结论. 因此, 仅当 k_i 为奇数且 $A_i>0$; 即在使得 $b(x)$ 为增函数的零点[$\Phi(x)$的转移点, 即图 8.1.2 中 $z_i=y_i$ 处]内层才能发生. 这样

$$\gamma_1=(C_i-C_{i-1})B_i \quad 和 \quad \gamma_2=\frac{C_i+C_{i-1}}{2}, \qquad (8.3.5)$$

其中

$$B_i=\frac{\frac{1}{2}}{\int_0^{\infty}\exp[-A_i\xi^{k_i+1}/(k_i+1)]d\xi}$$

$$=\frac{A_i^{1/(k_i+1)}(k_i+1)^{k_i/(k_i+1)}}{2\Gamma[1/(k_i+1)]},\tag{8.3.6}$$

其中$\Gamma(z)$表示Γ-函数，C_i为一些常数，可如下求定．下面我们将看到，并不是所有的转移点都是内层位置．所以，$u_\varepsilon(x)$在$x=y_i$附近的展开式如下给定：

$$u_\varepsilon(x)\sim\frac{C_i+C_{i-1}}{2}+(C_i-C_{i-1})B_i\int_0^{(x-y_i)\varepsilon^{-1/(k_i+1)}}\exp\left(-\frac{A_i\xi^{k_i+1}}{k_i+1}\right)d\xi.\tag{8.3.7}$$

在端点a和b附近的边界层可以展开．$u_\varepsilon(x)$在$x=a\equiv y_0$邻近的边界层如下展开：

$$u_\varepsilon(x)\sim\alpha+(C_0-\alpha)B_0\int_0^{(x-a)\varepsilon^{-1/(k_0+1)}}\exp\left(-\frac{A_0\xi^{k_0+1}}{k_0+1}\right)d\xi.\tag{8.3.8}$$

而在$x=b\equiv y_{n+1}$邻近的边界层如下展开：

$$u_\varepsilon(x)\sim\beta+(C_n-\beta)B_n\int_0^{(b-x)\varepsilon^{-1/(k_{n+1}+1)}}\exp\left(-\frac{A_{n+1}\xi^{k_{n+1}+1}}{k_{n+1}+1}\right)d\xi.\tag{8.3.9}$$

为了求出常数C_i，在方程(8.3.1)两边同乘以因子$e^{-\Phi(x)/\varepsilon}$且对每个区间$(y_i, y_j)(i<j)$进行积分，可得

$$e^{-\Phi(y_i)/\varepsilon}u_\varepsilon'(y_i)-e^{-\Phi(y_j)/\varepsilon}u_\varepsilon'(y_j)=0.\tag{8.3.10}$$

于是，利用展开式(8.3.7)，便有

$$e^{-\Phi(y_i)/\varepsilon}B_i(C_i-C_{i-1})\varepsilon^{-1/(k_i+1)}-e^{-\Phi(y_j)/\varepsilon}B_j(C_j-C_{j-1})\varepsilon^{-1/(k_j+1)}\sim0.\tag{8.3.11}$$

如果$\Phi(y_i)<\Phi(y_j)$，则(8.3.11)式中的第一项支配第二项，从

而使得 $C_i-C_{i-1}=0$，并且在 $x=y_i$ 处没有内层发生．所以很清楚，内层仅在那些使得

$$\Phi(y_i)=\max_j \Phi(y_j)$$

的点 y_i 上发生．令 y_1', $\cdots$, y_n' 表示 $\Phi(y_i)$ 取得极大值的点，我们选取这样两个极大值点代入条件(8.3.11)式中，便可得到

$$C_i=C_{i-1},$$

如果

$$k_i\neq\max_i k_i.$$

又令 y_1'', $\cdots$, y_n'' 表示使得

$$k_i=\max_i k_i$$

的点 y_i''．以后为了记号的简单起见，我们去掉字母的所有上角标．已经指出，内层仅发生于那些使得 $\Phi(x)$ 的绝对值在 (a, b) 内达到极大值并且使得以最大阶 $b(x)$ 为零的转移点上．现在我们来考虑(8.3.10)式，其中取 $i=0$．那么利用展开式(8.3.8)便得

$$e^{-\Phi(a)/\varepsilon}B_0(C_0-\alpha)\varepsilon^{-1/(k_0+1)}$$
$$-e^{-\Phi(y_1)/\varepsilon}B_1(C_1-C_{1-1})\varepsilon^{-1/(k_1+1)}\sim 0. \qquad (8.3.12)$$

所以，如果

$$\Phi(a)<\max_j \Phi(y_j),$$

则 $C_0=\alpha$．如果 $\Phi(a)$ 和 $\Phi(b)$ 两个都是极大值，我们可得到下面由 $n+1$ 个独立的线性方程组成的关于 $n+1$ 个常数 C_i 的方程组

$$\begin{bmatrix} B_0+B_1 & -B_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdot \\ -B_1 & B_1+B_2 & -B_2 & 0 & & \cdot \\ 0 & -B_2 & B_2+B_3 & -B_3 & & \cdot \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & -B_{n-1} & & B_n+B_{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_0\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_{n+1}\beta \end{bmatrix}. \qquad (8.3.13)$$

如果 $\Phi(a)<\max\Phi$，则(8.3.12)式就蕴涵着 $C_0=\alpha$. 类似地，如果 $\Phi(b)<\max\Phi$，则(8.3.12)式就蕴涵着 $C_n=\beta$. 对于这两种情况来说，无论是哪一种，方程组都可明显地简化到低阶的方程组. 方程组(8.3.13)的解为

$$C_j=(\alpha P_{n,j}+\beta Q_{n,j})P_n,$$

$$P_n=\sum_{j=0}^{n+1}\left[\frac{\prod_{i=0}^{n+1}B_i}{B_{n-j+1}}\right]\equiv\sum_{j=0}^{n+1}P_j,$$

$$P_{n,j}\equiv\sum_{i=0}^{j}P_i \quad 和 \quad Q_{n,j}\equiv P_n-P_{n,j}. \qquad (8.3.14)$$

现在我们来总结这个结果如下：设 $u_\varepsilon(x)$ 为边值问题

$$\varepsilon u''+b(x)u'=0, \qquad x\in(a, b),$$

$$u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta$$

的解，其中 $b(x)=-\Phi'(x)$. 又设 $y_1, \cdots, y_n$ 为 $\Phi(x)$在(a, b)内的转移点. 设 $s_1<s_2<\cdots<s_l$ 是那些使得

$$\Phi(s_j)=\max_i\Phi(y_i) \quad (j=1, \cdots, l)$$

的点 y_i. 设 $t_1<t_2<\cdots<t_m$ 为那些 s_j，使在这些点上以最大阶 k (关于 j 取最大. $1\leqslant j\leqslant m$)$b(x)$为零. 假定 $b(x)$关于 t_i 的泰勒级数展开式给定为

$$b(x)=A_i(x-t_i)^k+\cdots,$$

其中 $A_i>0$. 令 $B_i=(A_i)^{1/(k+1)}$，则当 $\varepsilon\to0$ 时

$$u_\varepsilon(x)\to\sum_{j=0}^{m}C_j\chi_{(t_j,t_{j+1})}(x), \quad x\in(t_j, t_{j+1})$$

其中
$$C_j=\frac{\alpha P_{m,j}+\beta Q_{m,j}}{P_m},$$

$$\chi_{(t_j,t_{j+1})}(x)=\begin{cases}1, & x\in(t_j, t_{j+1})\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

离出问题的相应结果可作如下陈述：设 $x_\varepsilon(t)$为随机微分

方程

$$dx_\varepsilon(t)=b(x_\varepsilon)dt+\varepsilon dw(t),\quad x_\varepsilon(0)=x\in(a,\ b)$$

的解，并且令

$$\tau=\inf\{t\,|\,x_\varepsilon(t)=a\ 或\ x_\varepsilon(t)=b\}$$

为 $x(t)$ 从 $(a,\ b)$ 的离出时间. 如果 $b(x)$ 和 t_j 如前面叙述过的那样，则在 $x=a$ 点的离出概率当 $\varepsilon\to0$ 时为

$$P\{x_\varepsilon(\tau)=a\,|\,x_\varepsilon(0)=x\}\to\sum_{j=0}^{m}D_j\chi_{(t_j,\,t_{j+1})}(x),\tag{8.3.15}$$

其中 $D_j=P_{m,j}/P_m$，而在 $x=b$ 点的离出概率为

$$P(x_\varepsilon(\tau)=b\,|\,x_\varepsilon(0)=x)=1-P(x_\varepsilon(\tau)=a\,|\,x_\varepsilon(0)=x).$$

注意：当 $\alpha=0,\ \beta=1$ 时，方程(8.3.1)的精确解给定如下：

$$u_\varepsilon(x)=\frac{\int_a^x e^{\Phi(s)/\varepsilon}\,ds}{\int_a^b e^{\Phi(s)/\varepsilon}\,ds}.$$

在 $b(x)$ 为单零点情况下，Φ 在其绝对最大值附近的展开式导出：

$$u_\varepsilon(x)\to\frac{\sum\limits_{t_i<x}|\Phi''(t_i)|^{-1/2}}{\sum\limits_{i}|\Phi''(t_i)|^{-1/2}}\quad(x\neq t_i),$$

这与(8.3.14)式的结果也相吻合。

习题 8.3.1

讨论 $f(a)>0,\ f(b)<0$ 的情况。

8.4 椭圆型偏微分方程的多重转移状态和离出问题

如第 8.1 节中所提到过的那样，从势阱中离出的不同方向

可以导致不同的反应. 因此，这些不同的反应率可由 $\partial\Omega$ 上的离出密度来确定. 在晶体中原子迁移问题意义上，离出密度决定了各向异性情况下的扩散矩阵. 设Ω是一个多势阱(见图8.4.1)，并设 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 是势能 Φ 在 Ω 中的孤立的局部极小值点.

这些极小值点都是系统

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{b}(\mathbf{x})\\ \mathbf{b}(\mathbf{x})=-\nabla\Phi\end{cases} \tag{8.4.1}$$

在 Ω 中的稳定平衡点. 由于 $\partial\Omega$ 在任何一边均是排斥边界，所以从 Ω 内出发的所有轨线均趋于各个平稳点. 我们假定 Ω 分割为各个 $\mathbf{x}_i$ 的吸引区域，即存在这样的子区域 $\Omega_i\subseteq\Omega$，使得

(i) $\mathbf{x}_j\in\Omega_j(j=1, \cdots, n)$，且如果 $\mathbf{x}\in\Omega_j$, $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}$，则当 $t\to\infty$ 时有 $\mathbf{x}(t)\to\mathbf{x}_j$.

(ii) $\bigcup\limits_{j=1}^{n}\overline{\Omega}_j=\overline{\Omega}$.

我们假定 $\partial\Omega_k$ 由分段光滑曲面 Γ_{ij} 组成，假定 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ 接触于边界 $\partial\Omega$，而$\Omega_{k+1}, \cdots, \Omega_n$ 被其他的 Ω_i-s 所包围着 (见图8.4.1和8.6.4). 设 $u_s(\mathbf{x})$是狄里克莱问题

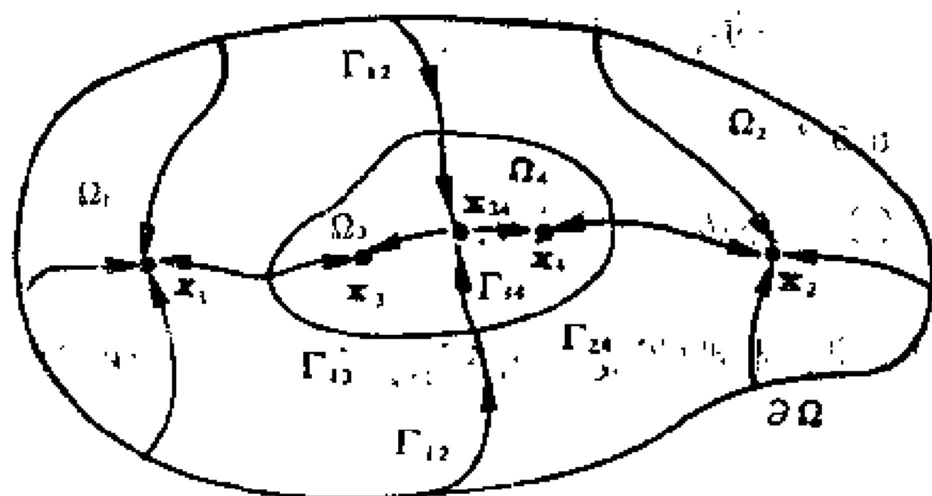


图 8.4.1 多重转移状态的势阱

$$\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u_\varepsilon = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \tag{8.4.2}$$

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上} \tag{8.4.3}$$

的解．由于当 $\varepsilon \to 0$ 时，解 u_ε 收敛于简化问题 $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u = 0$ 的解 u_0．因此，如前面已证明过的那样，$u_0(\mathbf{x})$ 在方程(8.4.1)的解轨线上必定是常数．如果 $\mathbf{x} \in \Omega_{ij}$，那么就有 $u_0(\mathbf{x}) = C_{ij}$，所以边界层和内层分别出现于 $\partial\Omega$ 和 Γ_{ij} 上．

现将穿过 Γ_{ij} 的内层构造如下：令 (ξ, η) 为 Γ_{ij} 附近的局部坐标，其中 ξ 表示 Γ_{ij} 的切向坐标，η 表示 Γ_{ij} 到内层的距离．我们称曲面 Γ_{ij} 为特征曲线的"奇异曲面"，即方程(8.4.1)的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 使得 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \in \Gamma_{ij}$ 继续停留于曲面 Γ_{ij} 上．因此，$\mathbf{x}(t)$ 在 Γ_{ij} 上必趋于 ω–极限集．由于其他情况也能导致同样的结果；因此不失一般性我们假定这个集合仅由孤立的稳定平衡点组成．Γ_{ij} 上的任何平衡点尽管在 Γ_{ij} 上是稳定的，但在 Ω 的内部却是不稳定的．例如，图8.4.1中点 $\mathbf{x}_{34}$ 在 Γ_{34} 上是稳定的，而在 Ω 内却是不稳定的．由于内层方程的解与原点坐标的选择无关，所以，我们可利用 Γ_{ij} 上的特征曲线作为坐标[79]．设 ξ 是 Γ_{ij} 上一点 $\mathbf{x}$ 到 Γ_{ij} 上的稳定平衡点 $\mathbf{x}_{ij}$ 的距离，使得

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x},$$

并且当 $t \to \infty$ 时 $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_{ij}$，其中这个距离是沿 Γ_{ij} 的特征曲线 $\mathbf{x}(t)$ 测定的．假定在 Γ_{ij} 的邻域内，

$$\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nu} = \eta b_1(\xi, \eta) + o(\eta).$$

这个关于在转移状态 Γ_{ij} 上，势函数 Φ 的形状的假定，在物理学文献中都曾已作出．我们应注意对 Φ 作不同的假定可产生不同的物理结果．在 (ξ, η) 坐标系统中，方程(8.2.4)就取如下形式：

$$u^0_{\omega\omega} + \omega B(s) u^0_\omega + C(s) u_s = 0, \tag{8.4.4}$$

其中 d/ds 表示特征方向上的方向导数，由于 $C(s)$ 在 Γ_{ij} 上的所有平衡点 s 上取零值，因此，方程(8.4.4)就成为退化的抛物型

方程，并对所有 s 都可求解. 对于方程(8.4.4)的边值问题存在唯一解，这个解可根据相应的条件来确定[79]. 其对应条件为

$$u^0(\omega, s) \to C_f, \text{ 当 } \omega \to \infty \text{ 时} \tag{8.4.5}$$

和

$$u^0(\omega, s) \to C_i, \text{ 当 } \omega \to -\infty \text{ 时}, \tag{8.4.6}$$

那么解 $u^0(\omega, s)$ 可表示为

$$u^0(\omega, s) = (C_f - C_i)\int_0^{\omega\gamma(s)} e^{-s^2/2} ds + \frac{C_f + C_i}{2}, \tag{8.4.7}$$

其中 $\gamma(s)$ 为带有初始条件 $\gamma(0) = \sqrt{B(0)}$ 的贝努利(Bernoulli)方程

$$\frac{d\gamma}{ds} + \frac{B(s)}{C(s)}\gamma - \frac{1}{C(s)}\gamma^3 = 0 \tag{8.4.8}$$

的解，从而使得 $u^0(\omega, 0)$ 是方程(8.4.4)在 $s=0$ 点的解. 因而

$$\gamma(s) = \left[\omega\int_0^s C(\sigma)^{-1}\exp\left(-2\int_0^\sigma \frac{B(t)}{C(t)}dt\right)d\sigma\right]^{-1/2}.$$

所以

$$\frac{\partial u^0}{\partial \omega}(0, s) = \frac{C_f - C_i}{2\sqrt{\pi}}\gamma(s). \tag{8.4.9}$$

与此相类似，边界层展开式也是用局部坐标 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', y)$ 来构造的，其中 $y = \rho(\mathbf{x}) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)$，$\mathbf{x}'$ 为切向坐标，其形式为：

$$u_s(\mathbf{x}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(\mathbf{x}') - C_i)\int_{\rho(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x})/s^{1/2}}^{\infty} e^{-s^2/2} ds + C_i. \tag{8.4.10}$$

(8.4.7) 式和 (8.4.10) 式推导过程的不同之处仅在于把条件(8.4.6)改为当 $\omega \to 0$ 时，$u^0(\omega, s) \to f(\mathbf{x}')$ 而已. 为了求出 C_i，我们对(8.4.2)式两边同时乘以因子 $e^{-\Phi/s}$，然后在每个 Ω_i 上进行积分，便得

$$\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} e^{-\Phi/s}\frac{\partial u_s}{\partial \nu}dS + \sum_j \int_{\Gamma_{ij}} e^{-\Phi/s}\frac{\partial u_s}{\partial \nu}dS = 0. \tag{8.4.11}$$

对以上积分的主要贡献是来自点 $\mathbf{x}'$ 上，这些点上 Φ 分别在 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_i$ 和在 Γ_{ij} 上取极小值．在这些点上方程(8.4.4)就简化为

$$u^0_{\omega\omega}+\omega b_1(\omega,\ 0)u^0_\omega=0, \tag{8.4.12}$$

所以方程(8.4.9)也就可被代替为

$$\frac{\partial u^0}{\partial\nu}(\mathbf{x}',\ 0)=\varepsilon^{-1/2}\frac{C_j-C_i}{2\sqrt{\pi}}[b_1(\mathbf{x}')]^{1/2},\ \text{在}\ \Gamma_{ij}\ \text{上}. \tag{8.4.13}$$

并且由展开式(8.4.10)就可得到

$$\frac{\partial u^0(\mathbf{x}',\ 0)}{\partial\nu}=\varepsilon^{-1/2}\frac{(f(\mathbf{x}')-C_i)[b_1(\mathbf{x}')]^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}. \tag{8.4.14}$$

我们将(8.4.13)式和(8.4.14)式代入(8.4.11)式，就可得到

$$\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2\sqrt{\pi}}\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}(f(\mathbf{x}')-C_i)[b_1(\mathbf{x}')]^{1/2}e^{-\Phi/\varepsilon}dS_{\mathbf{x}'}$$
$$+\sum_j\frac{C_j-C_i}{2\sqrt{\pi}}\varepsilon^{-1/2}\int_{\Gamma_{ij}}e^{-\Phi/\varepsilon}[b_1(\mathbf{x}')]^{1/2}dS_{\mathbf{x}'}\sim 0. \tag{8.4.15}$$

首先考虑区域 Ω_i 与 $\partial\Omega$ 接触的情况．我们须将

$$\Phi_i=\min_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}\Phi\quad \text{与}\quad \Phi_{ij}=\min_{\Gamma_{ij}}\Phi$$

作比较．如果 $\Phi_i>\Phi_{ij}$，则 $C_i=C_j$ 且没有内层形成，这样我们可不考虑 Γ_{ij}，因为穿过 Γ_{ij} 没有突变出现．因此，我们只要考虑 $\Phi_{ij}\geqslant\Phi_i$ 的情况．如果 $\Phi_{ij}>\Phi_i$，那么

$$C_i=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}e^{-\Phi/\varepsilon}b_1^{1/2}(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')dS}{\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}e^{-\Phi/\varepsilon}b_1^{1/2}(\mathbf{x}')dS}$$
$$=\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}f(\mathbf{x}')\mu_i(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}. \tag{8.4.16}$$

这种情况类似于上一节中

$$\Phi(a) < \max \Phi$$

的情况，其中 C_0 可用边界上的已知条件明显地给出。测度 $\mu_i(\mathbf{x}')dS_{x'}$ 可通过(8.4.16)式中的积分的近似计算来确定，这种近似计算法在第 7.4 节中已经阐明了。如果 $\Phi_{ij}=\Phi_i$，我们得到系数 C_i 的一个线性方程。

接下来我们考虑区域 Ω_i 不接触 $\partial\Omega$ 的情况，那么在 Ω_i 上积分，便有

$$C_i=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sum_j C_j\int_{\Gamma_{ij}} b_1^{1/2}(\mathbf{x}')e^{-\Phi_j/\varepsilon}dS_{x'}}{\int_{\partial\Omega_i} b_1^{1/2}(\mathbf{x}')e^{-\Phi/\varepsilon}dS_{x'}},\quad (i=k+1,\ \cdots,\ n) \tag{8.4.17}$$

其中
$$\partial\Omega_i=\bigcup_j \Gamma_{ij}.$$

利用第 7.4 节中所叙述的方法对(8.4.16)式和(8.4.17)式中的积分作渐近计算，得到

$$C_i=\sum_j C_j D_{ij}, \tag{8.4.18}$$

其中
$$D_{ij}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\Gamma_{ij}} b_1^{1/2}(\mathbf{x}')e^{-\Phi/\varepsilon}dS_{x'}}{\int_{\partial\Omega_i} b_1^{1/2}(\mathbf{x}')e^{-\Phi/\varepsilon}dS_{x'}}$$
$$=\int_{\Gamma_{ij}} b_1^{1/2}(\mathbf{x}')\mu_{ij}(\mathbf{x}')dS_{x'}\quad (i=k+1,\ \cdots,\ n)$$

注意，$D_{ij}\geqslant 0$ 且

$$\sum_j D_{ij}=1,$$

所以方程(8.4.18)中 C_j 的系数 D_{ij} 是概率。方程(8.4.18)与方程组(8.3.10)中第 2 个至第 $n-1$ 个方程相类似，它们为齐次线性方程。方程(8.4.16)与方程组(8.3.10)中的第 1 个及最后一个方程相类似，它们为非齐次线性方程。这些方程可以写成这

样的形式：

$$\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} f(\mathbf{x}')b_1^{1/2}(\mathbf{x}')\mu_i(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}$$

$$=C_i\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} b_1^{1/2}(\mathbf{x}')\mu_i(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}$$

$$+\sum_j \frac{C_i-C_j}{2}\int_{\Gamma_{ij}} b_1^{1/2}(\mathbf{x}')\mu_{ij}(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}. \quad (8.4.19)$$

因此，(8.4.18)式及(8.4.19)式就蕴涵着每个系数 C_i 为方程(8.4.19)左端式子的一些线性组合，即

$$C_i=\sum_{j=1}^{k} d_{ij}\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_j} f(\mathbf{x}')b_1^{1/2}(\mathbf{x}')\mu_j(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'},$$

其中常数 d_{ij} 对于任意给定的方程组都能确定。因此，$\partial\Omega$ 的离出密度为

$$p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=P(\mathbf{x}_\varepsilon(\tau_\varepsilon)=\mathbf{y}\in\partial\Omega\,|\,\mathbf{x}_\varepsilon(0)=\mathbf{x}\in\Omega),$$

$$\sim\sum_{i,j=1}^{n} \chi_{\Omega_i}(\mathbf{x})d_{ij}b_1^{1/2}(\mathbf{y})\mu_j(\mathbf{y}). \quad (8.4.20)$$

对于在 Ω 内只有一个稳定平衡点的情况，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{y})p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial\Omega} e^{-\Phi/\varepsilon}f(\mathbf{x}')b_1^{1/2}(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}}{\int_{\partial\Omega} e^{-\Phi/\varepsilon}b_1^{1/2}(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}}.$$

这样，当 S 具有非空内部时，方程(8.4.20)就可简化为

$$p(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\sim\frac{\chi_S(\mathbf{y})b_1^{1/2}(\mathbf{y})}{\int_S b_1^{1/2}(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}}\equiv p(\mathbf{y}),\ \mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{y}\in\partial\Omega$$

$$\equiv\frac{\chi_S(\mathbf{y})\left[\partial^2\Phi(\mathbf{y})/\partial\nu^2\right]^{1/2}}{\int_S \left[\partial^2\Phi(\mathbf{y})/\partial\nu^2\right]^{1/2}dS_{\mathbf{y}}}, \quad (8.4.21)$$

其中 $$S=\{\mathbf{y}\in\partial\Omega\,|\,\Phi=\min_{\partial\Omega}\Phi\},$$

$$\chi_S(\mathbf{y})=\begin{cases}1, & \text{如果 } \mathbf{y}\in S,\\ 0, & \text{如果 } \mathbf{y}\notin S.\end{cases}$$

如果 $S=\{\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_k\}$ 且

$$\det \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i'\partial x_j'}\right|_{\mathbf{y}_k}=H_k\neq 0 \quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ n-1),$$

那么

$$p_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\sim\frac{\sum_{j=1}^{m}(\partial^2\Phi/\partial\nu^2)^{1/2}(\mathbf{y}_j)\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}_j)H_j^{-1/2}}{\sum_{j=1}^{m}(\partial^2\Phi/\partial\nu^2)^{1/2}(\mathbf{y}_j)H_j^{-1/2}}$$

$$\equiv p(\mathbf{y}). \tag{8.4.22}$$

我们要注意对于光滑势垒的结果[即(8.4.21)式和(8.4.22)式]和对前面所讨论的尖削势垒情形的结果之间的不同之处.

作为例子，考虑在 Ω 内有两个稳定平衡点的情况. 设 u_ε 为狄里克莱问题

$$\varepsilon\Delta u+x(1-x^2)u_x-yu_y=0,\ \text{在 }\Omega\text{ 中},$$
$$u=f,\ \text{在 }\partial\Omega\text{ 上} \tag{8.4.23}$$

的解，其中 Ω 为包含三个平衡点(0, 0)和(±1, 0)的有界平面区域，$\partial\Omega$ 为光滑边界，且在 $\partial\Omega$ 上有 $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}<0$, 这里

$$\mathbf{b}=(b_1,\ b_2)^T$$

而 $b_1=x(1-x^2)$ 和 $b_2=-y$. 在此问题中

$$\mathbf{b}=-\nabla\phi,\quad -\phi=x^2/2-x^4/4-y^2/2.$$

点(±1, 0)是确定的动态系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(1-x^2)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-y\end{cases} \tag{8.4.24}$$

的稳定平衡点. 因而，对点(±1, 0)没有内层发生.

简化方程在 $\Omega_1=\Omega\cap\{x<0\}$ 内的解为常数 C_1, 而在

$$\Omega_2=\Omega\cap\{x>0\}$$

内的解为(可能)不同的常数 C_2. 由此得出沿直线 $x=0$ 可形成一内层，它包含了动态系统(8.4.24)的鞍点(0, 0). 在

$$\Gamma_{12}=\{x=0\}$$

附近我们引入伸缩变量 $\omega=x\varepsilon^{-1/2}$，且可知用内层展开式中的首项可解出如下退化抛物型边值问题

$$u_{\omega\omega}+\omega u_\omega-yu_y=0, \tag{8.4.25}$$

其中 $-\infty<y<\infty$，且 y 在一包含 $y=0$ 的开区间中. 相应条件(8.4.6)式和(8.4.7)式蕴涵：当 $\omega\to\pm\infty$ 时，$u(\omega, y)\to C_{1,2}$. 方程(8.4.25)的唯一解便为

$$\tilde{u}(\omega, y)=\frac{C_2-C_1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\omega e^{-s^2/2}ds+\frac{C_2+C_1}{2}. \tag{8.4.26}$$

最后，按通常的方法，我们在 $\partial\Omega$ 的一个邻域内构造一个边界层函数，于是复合展开式为

$$u_\varepsilon(x, y)\sim\tilde{u}(x\varepsilon^{-1}, y)+[f(x, y)-\tilde{u}(x\varepsilon^{-1}, y)]e^{\phi(x,y)/\varepsilon}. \tag{8.4.27}$$

为了计算常数 C_1 和 C_2 的值，我们对方程(8.4.23)两边同时乘以因子 $e^{-\phi/\varepsilon}$，然后在每个子区域 Ω_1 和 Ω_2 上进行积分，便得到两个方程

$$C_i\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}e^{-\phi/\varepsilon}\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds-\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}e^{-\phi/\varepsilon}f\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}ds$$
$$+(-1)^i\frac{C_2-C_1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\varepsilon}\int_{y_1}^{y_2}e^{-t^2/\varepsilon}dt,\ (i=1, 2) \tag{8.4.28}$$

其中 y_1 和 y_2 是 $\partial\Omega$ 和 Γ_{12} 的交点. 对积分在线段 Γ_{12} 上的贡献为 $O(\varepsilon)$，而积分在 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_i$ 上的贡献为 $O(\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\hat{\phi}/\varepsilon})$，其中 $\hat{\phi}_i$ 为 ϕ 在 $\partial\Omega\cap\partial\Omega$ 上的极小值. 所以 C_1 和 C_2 的值就取决于 $\hat{\phi}_i(i=1, 2)$ 的符号. 特别，对于情况(A)，即如果 $\hat{\phi}_i(i=1, 2)$ 任

一为正，则对积分在线段 Γ_{12} 上的贡献为主要，且 $C_1=C_2$ 为了计算 $C_1=C_2$ 的值，我们将(8.4.28)式的两个方程相加，且对所得的积分作渐近计算，得到

$$C_1=C_2=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial\Omega}e^{-\phi/\varepsilon}f\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}ds}{\int_{\partial\Omega}e^{-\phi/\varepsilon}\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}ds}. \quad (8.4.29)$$

然而；对于情况(B)，即 $\hat{\phi}_i(i=1, 2)$ 均为非正，那么积分在 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_i$ 上的贡献为主要，且 C_i 由下式给出：

$$C_i=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}e^{-\phi/\varepsilon}f\,\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}ds}{\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}e^{-\phi/\varepsilon}\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}ds} \quad (i=1, 2).$$

所以，在情况(A)中，

$$p=\lim_{\varepsilon\to 0}p(x, y)$$

分别由情况(i)和情况(ii)中的(7.5.7)式和(7.5.7′)式给出．在情况(B)中，

$$p(x, y, \xi, \eta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Pr[(x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau)) =(\xi, \eta)\,|\,(x_\varepsilon(0), y_\varepsilon(0))=(x, y)]$$

由下式给出：

$$p(x, y, \xi, \eta)=\sum_{i=1}^{2}\chi_{\Omega_i}(x, y)p_i(\xi, \eta), \quad (8.4.30)$$

这时如果在 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_i$ 上情况(i)的条件满足(参看第7.4节)，则其中的 $p_i(\xi, \eta)$ 为

$$p_i(\xi, \eta)=\frac{\chi_{U_i}(\xi, \eta)\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\xi, \eta)}{\int_{U_i}\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}ds}, \quad (i=1, 2) \quad (8.4.31)$$

如果在 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_i$ 上情况(ii)的条件满足，则其中的 $p_i(\xi, \eta)$ 为

$$p_i(\xi, \eta)=\frac{\sum_{k=1}^{i} d_k \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(s_k)\delta(s-s_k)}{\sum_{k=1}^{i} d_k \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(s_k)}. \quad (i=1, 2)$$

如果 $x=0$, 那么

$$p(0, y, \xi, \eta)=\frac{1}{2}(p_1+p_2).$$

为了用随机过程来说明这些结论的特性, 取 Ω 为圆 $x^2+y^2<R^2$, 其中 $R>1$. 我们可看到存在一个 R 的临界值, 即 $R=\sqrt{2}$, 使得当 $R>\sqrt{2}$ 时情况(A)成立, 而当 $R\leqslant\sqrt{2}$ 时情况(B)成立. 所以, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 如果 $R\leqslant\sqrt{2}$, 那么起始于 Ω_i 内的随机过程 $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ 将以几乎为 1 的概率从 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_i$ 离出, 且以几乎为零的小概率穿过直线 $x=0$. 反之, 如果 $R>\sqrt{2}$, 那么穿过直线 $x=0$ 的概率一般不为零, 而且过程不是离开 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_1$ 就是离开 $\partial\Omega\cap\partial\Omega_2$ 且与过程的起始点无关, 在这种情况下, 离出点的概率分布仅依赖于 ϕ 在 $\partial\Omega$ 上的极大值分布. 因此, 可以看到当 R 足够小时, 粒子在通过曲线 Γ_{12} 之前很可能要碰撞其起始那部份, 即 Ω_i 的边界. 如果 R 很大, 那么粒子可通过 Γ_{12}, 于是其分离影响消失了.

8.5 离出时间

期望离出时间 $E_{\mathbf{x}}\tau^\varepsilon=v_\varepsilon(\mathbf{x})$ 是下列问题的解:

$$\varepsilon\Delta v_\varepsilon(\mathbf{x})+\mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\nabla v_\varepsilon(\mathbf{x})=-1, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \quad (8.5.1)$$

$$v_\varepsilon(\mathbf{x})=0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}. \quad (8.5.2)$$

因为边值问题(8.5.1), (8.5.2)有一个有界的解, 所以, 离出时间概率为 1 有限. 由于解 $v_\varepsilon(\mathbf{x})$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时按指数增加, 因而, 我们可令

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}) = e^{K/\varepsilon} C(\varepsilon) W_\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{8.5.3}$$

使得 $C(\varepsilon) = o(e^{K/\varepsilon})$ 且 $W_\varepsilon(\mathbf{x}) = O(1)$，其中常数 K 尚待确定. 在 Ω 内部我们有 $W_\varepsilon(\mathbf{x}) \sim 1$，于是按第 8.4 节的步骤，我们来构造一个 $\partial\Omega$ 附近的边界层展开式. 为此，在 $\partial\Omega$ 附近引入局部坐标 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', y)$，其中 $y = -\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)$. 我们再引入伸缩变换 $\eta = -\varepsilon^{-1/2} y$，于是方程(8.5.1)就变成如下的形式，即

$$\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial \eta^2} + \eta \dot{b}_1(\mathbf{x}) \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \eta} + \mathbf{b}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} W_\varepsilon + o(1) = O(e^{-K/\varepsilon}), \tag{8.5.4}$$

其中 ηb_1 和 $\mathbf{b}_2$ 分别表示 $\partial\Omega$ 附近的 $\mathbf{b}$ 的法向分量和切向分量. 于是边界层展开式中的首项 W^0 满足方程

$$W^0_{\eta\eta} + \eta b_1(\mathbf{x}') W^0_\eta + \mathbf{b}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} W^0 = 0. \tag{8.5.5}$$

这个方程恰好就是方程(8.4.4). 根据(8.5.2)式，我们将

$$W^0 \big|_{\eta=0} = 0$$

作为边界条件. 另外，对比边界层与内层展开还可得到另一个条件，即当 $\eta \to \infty$ 时 $W^0 \to 1$. 这样，我们就可用同前面一样的方法来解上述边值问题. 于是，根据前一节中所采纳的步骤来构造一个解，我们记它为 $W^0(\eta, \xi)$，其中 ξ 为前一节中所引进的函数. 下一步运用 $W^0(\eta, \xi)$ 以及由(8.5.2)式所得到的条件

$$\varepsilon \nabla \cdot (e^{-\Phi/\varepsilon} \nabla v_\varepsilon) = -e^{-\Phi/\varepsilon} \tag{8.5.6}$$

中内层展开的首项. 对此方程积分并运用散度定理，便得

$$\varepsilon \int_{\partial\Omega} e^{-\Phi/\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} \, dS = -\int_\Omega e^{\Phi/\varepsilon} \, d\mathbf{x}. \tag{8.5.7}$$

运用(8.5.3)式以及用(8.5.8)式的 $W^0(\eta, \xi)$ 所给出的边界层展开式的首项，并且估算出拉普拉斯积分当 $\varepsilon \to 0$ 时的渐近结果. 可以看到方程(8.5.7)对右边的积分的主要贡献是来自 Ω 内 Φ 取绝对极小值的点处，而对方程左边的积分的主要贡献是来

自 $\partial\Omega$ 上 Φ 的最低鞍点的邻域. 因而，仅需要在这样的鞍点 $\eta=0$ 和 $\mathbf{x}'=\mathbf{x}_i'$ 的邻域内用显式构造出 $W^0(\eta, \xi)$. 在这些点的邻域内，如第 8.4 节中所述的那样，边界层方程(8.5.5)中的末项可以略去. 这样，最终方程的解就由下式给出：

$$W^0=\frac{\int_0^\eta e^{-(s^2/2)b_1(\mathbf{x}')}ds}{\int_0^\infty e^{-(s^2/2)b_1(\mathbf{x}')}ds}; \tag{8.5.8}$$

即

$$W_\varepsilon(\mathbf{x})\sim\frac{\int_0^{|y|/\sqrt{\varepsilon}} e^{-(s^2/2)b_1(\mathbf{x}')}ds}{\int_0^\infty e^{-(s^2/2)b_1(\mathbf{x}')}ds} \tag{8.5.9}$$

其中 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}', y)$, $|y|\ll 1$. 特别,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial W_\varepsilon(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{x})}\right|_{\partial\Omega}&=\left.\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial y}\right|_{y=0}\sim-\varepsilon^{-1/2}\int_0^\infty e^{-(s^2/2)b_1(\mathbf{x}')}ds\\&=-2\varepsilon^{-1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}[b_0(\mathbf{x}')]^{1/2}.\end{aligned} \tag{8.5.10}$$

我们将(8.5.3)式和(8.5.10)式代入(8.5.7)式中，得到

$$\begin{aligned}&2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varepsilon^{1/2}e^{K/\varepsilon}C(\varepsilon)\int_{\partial\Omega}e^{-\Phi/\varepsilon}b_1^{1/2}(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}\\&\sim\int_\Omega e^{-\Phi/\varepsilon}d\mathbf{x},\end{aligned} \tag{8.5.11}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，须求出上述积分的渐近值.

如果 Φ 在 $\partial\Omega$ 上沿 $\partial\Omega$ 中的一个 $(n-1)$ 维"弧"S 达到其极小值 $\hat{\Phi}$, 我们得到

$$\begin{aligned}&2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varepsilon^{1/2}e^{K/\varepsilon}e^{-\hat{\Phi}/\varepsilon}C(\varepsilon)\int_S b_1^{1/2}(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}\\&\sim(2\pi\varepsilon)^{n/2}\sum_i\mathscr{H}^{-1/2}(\mathbf{y}_i),\end{aligned} \tag{8.5.12}$$

其中
$$\min_\Omega\phi=\Phi(\mathbf{y}_i)=0$$

和 $$\mathscr{H}(\mathbf{y}_j)=\det\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{y}_j).$$

所以，我们可选取 $K=\hat{\Phi}$，并且有

$$C(\varepsilon)=2^{(n-3)/2}\pi^{(n+1)/2}\varepsilon^{(n-1)/2}\frac{\sum_j\mathscr{H}^{-1/2}(\mathbf{y}_j)}{\int_S b_1^{1/2}(\mathbf{x}')dS_{\mathbf{x}'}}. \tag{8.5.13}$$

如果 Φ 在 $\partial\Omega$ 的孤立点 $\mathbf{x}_i'$ 处达到其极小值，且

$$\det\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j'\partial x_k'}\bigg|_{\mathbf{x}_i'}=\mathrm{H}(\mathbf{x}_i')\neq 0\quad (j,\ k=1,\ \cdots,\ n),$$

那么 K 如上面一样选择，且

$$C(\varepsilon)=\frac{(\pi/2)\sum_j\mathscr{H}^{-1/2}(\mathbf{y}_j)}{\sum_i b_1^{1/2}(\mathbf{x}_i')H^{-1/2}(\mathbf{x}_i')}. \tag{8.5.14}$$

所以，我们便渐近地计算了期望离出时间 $E_{\mathbf{x}}\tau^{\varepsilon}=v_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 的值.

对于 Φ 只有一个极小值的情况，如在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处达到极小值那么 $E_0\tau^{\varepsilon}$ 就由下式给出：

$$E_0\tau^{\varepsilon}=\begin{cases}\dfrac{e^{\hat{\Phi}/\varepsilon}}{2^{(1-n)/2}\varepsilon^{(1-n)/2}\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\int_S b_1^{1/2}(\mathbf{x}')dS}, & \text{情况(i)};\\[2ex] \dfrac{e^{\hat{\Phi}/\varepsilon}(1/\pi)}{\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\sum_i b_1^{1/2}(\mathbf{x}_i')\mathrm{H}^{-1/2}(\mathbf{x}_i')}, & \text{情况(ii)},\end{cases} \tag{8.5.15}$$

其中 $$\hat{\Phi}=\min_{\partial\Omega}\Phi$$

和 $$b_1(\mathbf{x}')=\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2}(\mathbf{x}')\right|.$$

当 Φ 有几个极小值时，关于离出时间也有类似的显式表达式.

习题 8.5.1

证明在一维情况下，例如在 $x=x_0$ 处存在单势阱，则方程(8.5.1)的解

为

$$E_{x_0}\tau^\varepsilon \cong \frac{\pi}{\sqrt{-\Phi''(x_0)\Phi''(x_2)}} \exp \frac{[-(\Phi(x_2)-\Phi(x_0))]}{\varepsilon}. \tag{8.5.16}$$

这里 $b(x)=-\Phi'(x)$, $\Omega=(x_1, x_2)$, 其中 $x_1<x_0<x_2$, 且 Φ 在 Ω 中的点 x_0 处达到极小值，而在 x_1 和 x_2 处达到极大值，且有

$$\Phi(x_1)=\Phi(x_2) \quad 及 \quad \Phi'(x_1)=\Phi'(x_2)=0.$$

8.6 化学反应速率中的应用和第二特征值问题

我们在前面已经阐明过化学反应速率由 $\varkappa=1/E_0\tau^\varepsilon$ 给出. 所以，我们可由公式(8.5.15)，其中 $\varepsilon=kT/mQ$，并且用势函数

$$\Psi=m\Phi$$

来代替单位质量的势 Φ，便得到实时尺度(physical time scale)上修正的阿尔海纳斯定律：

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi m\beta}\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\sum_i \mathrm{H}^{-1/2}(\mathbf{x}_i')\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}(\mathbf{x}_i')\right]^{1/2} e^{-\hat{\Psi}/kT}. \tag{8.6.1}$$

对于情况(i)，

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi m\beta}(2kT)^{(n-1)/2}\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\int_S\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}(\mathbf{x})\right]^{1/2} dS_{\mathbf{x}} e^{-\hat{\Psi}/kT},$$

项 $\mathscr{H}(\mathbf{0})$ 表示 Ψ 在势阱底部所算出的汉赛(Hessian)值. 由经典力学可知，$\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})$ 是位于势阱底部的粒子的振荡所产生的主频率的乘积. 因而粒子振荡得越快就越易逃逸. 项 $\mathrm{H}(\mathbf{x}_i')$ 表示 Ψ 在转移状态 $\mathbf{x}_i'$ 处所估算出的汉赛值. $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{x}_i')$ 是粒子在转移点，亦即 Ψ 的鞍点的振荡所产生的频率的乘积. 因而粒子振荡得越快，它在转移点停留的时间就越长，于是反应速率就逐渐降低. 项 $\partial^2\Psi/\partial v^2(\mathbf{x}_i')$ 正比于过鞍点方向的转移状态处曲率，亦即粒子离出轨线的曲率. 这样，过转移点的轨线越平坦，则粒

子逃逸需要的时间就越长;轨线的曲率越大,则反应速率也就越大. 表达式 $\sum_j H^{-1/2}(\mathbf{x}_j)[\partial^2\Psi/\partial v^2]^{1/2}$ 表示 $\varkappa$ 算式中指数前面的因子与势的空间结构之间的相依性,从而,可解释化学反应速率中的位阻因素. 这个因子考虑到了这样一个事实,即不同方向的碰撞很可能具有不同的化学效应(即具有不同的激活效应). 分母中的项 m 是由 Φ 到 Ψ 间的变换所产生的,它表示碰撞过程中粒子的约化质量. 由于反应速率用实际时间变量表达的,因此,在分母中出现了因子 β,它表示粘滞力. 这个粘滞力降低了粒子的下降速度,从而抑制了反应. 另一方面,离出时间是用变尺度时间表达的. 指数因子是化学反应速率的阿尔海纳斯定律,其中的 Ψ 为由势阱底部上方的最低转移点的高度所决定的激活能. 指数前面的因子中的位阻因素的表达式似乎是新的. 对于一维的情况,上述这个公式就约化为克拉美公式[47]. 当然,在一维情况下是没有位阻效应的.

在化学反应的许多实际模型中,如第 8.1 节中所叙述的模型,已经证明了反应速率 $\varkappa$ 为问题(8.1.3)的特征值 λ_1. 以下我们就来计算特征值 λ_1. 首先假定 $\Phi(x)$ 分别在 x_1 和 x_2 处有两个局部极小值,而在 x_3 处有一个局部极大值,且 $x_1<x_2<x_3$. 我们还假定 $\Phi(x_1)<\Phi(x_3)<\Phi(x_2)$(见图 8.6.1). 开始时位于 x_3 附近较浅的势阱中的大部分粒子将克服 x_2 点处的势垒,最终静止在 x_1 点处的较深势阱中. 图 8.6.2 给出了最终平衡分布 $v^0(x)$ 的图形. 因此,接近平衡点的速率可由克服 x_2 点处的势垒所需要的时间 $\bar{\tau}$ 决定,已经证明该时间为 $O(e^{K/\varepsilon})$,其中

$$K=\Phi(x_3)-\Phi(x_2)>0.$$

所以,希望 λ_1 是指数律的小量. 假定

$$\lambda_1=O(e^{-K_1/\varepsilon}),\quad K_1>0.$$

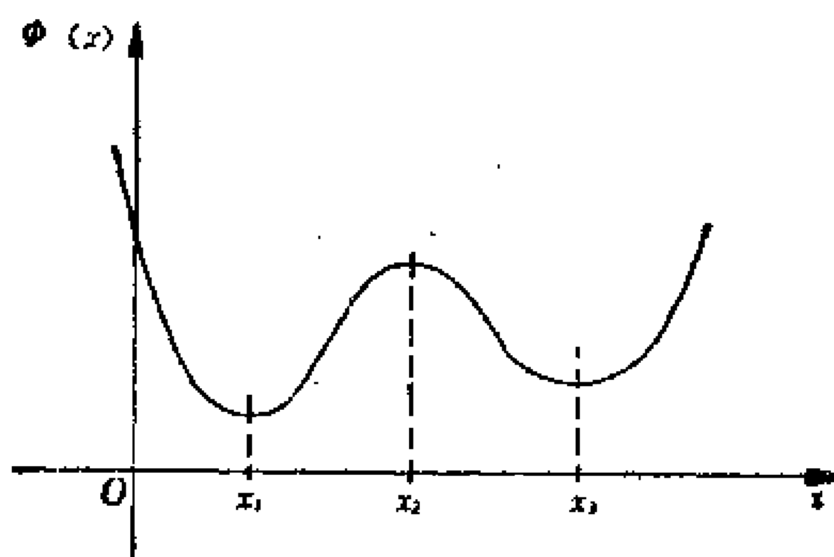


图 8.6.1

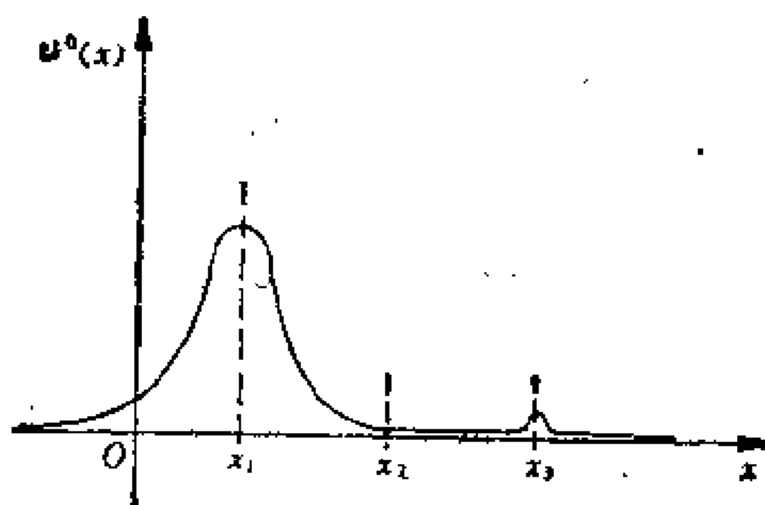


图 8.6.2

事实上可证明 $\lambda_1=1/\bar{\tau}$，从而使得

$$K_1=K.$$

令 $u_1(x)=e^{\Phi/\varepsilon}v(x)$，其中假定 v 为 $O(1)$ 函数，得到

$$\varepsilon v_{xx}-\Phi_x v_x=\lambda_1 v. \tag{8.6.2}$$

由于 λ_1 是指数律的小量，所以当 $\varepsilon\to 0$ 时，v 展开式中的首项 V^0 为简化方程

$$\Phi_x v_x^0=0 \tag{8.6.3}$$

的解．于是有

$$v^0(x)=\begin{cases}C_1, & x<x_2,\\ C_3, & x>x_2.\end{cases} \tag{8.6.4}$$

我们可看到，正如前面指出的那样常数 C_1 和 C_3 可以不相等，而且，在不稳定平衡点 x_2 的邻域内可存在一个内层，该内层可由下面的伸缩变换

$$\xi=\frac{x-x_2}{\varepsilon^{1/2}} \tag{8.6.5}$$

表征，于是内层展开式的首项满足方程

$$v^0_{\xi\xi}-\frac{\Phi^{(2k)}(x_2)}{(2k-1)!}\xi^{2k-1}v^0_{\xi}=0, \tag{8.6.6}$$

其中 $2k$ 为 Φ 在 x_2 点处的第一个非零导数的阶．为了简单起见，考虑 $k=1$ 的情况．对于 $k>1$ 的情况可按第 8.3 节中的方法同样进行处理．此外，$V^0(\xi)$ 满足相应条件

$$V^0(\xi)\to\begin{cases}C_1, & 当\ \xi\to-\infty\ 时,\\ C_3, & 当\ \xi\to\infty\ 时.\end{cases} \tag{8.6.7}$$

因此，

$$V^0(\xi)=\frac{C_3-C_1}{2B}\int_0^{\xi}\exp\frac{\Phi''(x_2)s^2}{2}ds+\frac{C_1+C_2}{2}, \tag{8.6.8}$$

其中

$$B=\sqrt{\frac{\pi}{2|\Phi''(x_2)|}}. \tag{8.6.9}$$

我们可看到 $\Phi''(x_2)<0$．于是对于 $\varepsilon\ll1$ 时，v 的一致渐近展开式给定为

$$v(x)=V^0\left(\frac{x-x_2}{\varepsilon^{1/2}}\right)+o(1),\ 当\ \varepsilon\to0. \tag{8.6.10}$$

由于 $e^{-\Phi/\varepsilon}$ 是一特征函数，因此常数 C_1，C_3 中的一个可以任意选取．为了确定另外一个常数，我们对方程(8.6.2)两边同乘以

因子 $e^{-\Phi/\varepsilon}$，且从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，便得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \left(e^{-\Phi/\varepsilon} v_x\right)_x dx = \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi/\varepsilon} v dx. \qquad (8.6.11)$$

因为当 $x \to \pm\infty$ 时 $e^{-\Phi/\varepsilon} v_x \to 0$，故方程(8.6.11)左边的积分等于零。但 $\lambda_1 \neq 0$，所以有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi/\varepsilon} v dx = 0. \qquad (8.6.12)$$

现将(8.6.10)式代入(8.6.12)式中，可以求得

$$\frac{C_1}{C_3} \sim \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi/\varepsilon}\left[1 + (1/B)\int_0^{\xi} e^{\Phi''(x_2)s^2/2} ds\right] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi/\varepsilon}\left[1 - (1/B)\int_0^{\xi} e^{\Phi''(x_2)s^2/2} ds\right] dx}, \qquad (8.6.13)$$

$$\begin{aligned} -\frac{C_1}{C_3} \sim & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{B}\int_0^{(x_1-x_2)/\varepsilon^{1/2}} e^{\Phi''(x_2)s^2/2} ds\right) \\ & + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Phi''(x_1)}{\Phi''(x_3)}}\, e^{-[\Phi(x_3)-\Phi(x_1)]/\varepsilon} \\ & \times \left(1 + \frac{1}{B}\int_0^{(x_3-x_2)/\varepsilon^{1/2}} e^{\Phi''(x_2)s^2/2} ds\right). \end{aligned} \qquad (8.6.14)$$

从而 C_1 对 $1/\varepsilon$ 为指数趋于零。于是我们可取 $C_3=1$，使得关于 v 展开式中的首项由

$$v \sim \frac{1}{2B}\int_0^{\xi} e^{\Phi''(x_2)s^2/2} ds + \frac{1}{2} \qquad (8.6.15)$$

来确定。

现在我们来计算特征值 λ_1。为此，对方程(8.6.2)的两边同乘以因子 $e^{-\Phi/\varepsilon}$，且从 x_2 到 ∞ 积分。通过积分的渐近计算，得到

$$-\varepsilon v_x(x_2) e^{-\Phi(x_2)/\varepsilon} \sim \lambda_1 e^{-\Phi(x_3)/\varepsilon} \frac{2\pi}{\sqrt{\Phi''(x_3)}}. \qquad (8.6.16)$$

将(8.6.15)式代入(8.6.16)式中，可以求得

$$\lambda_1 \sim -\frac{\sqrt{\Phi''(x_3)\,|\Phi''(x_2)|}}{2\pi}\, e^{-[\Phi(x_2)-\Phi(x_3)]/\varepsilon}, \quad (8.6.17)$$

可看到 $-1/\lambda_1$ 是 $x_\varepsilon(t)$ 从 x_3 点处势阱的期望离出时间.

当 $\Phi(x_3)=\Phi(x_1)$ 时(即当两个势阱相等时), 通过类似的计算, 可得到这样的结果: 即(8.6.8)式中的 C_1, C_3 为

$$C_1=-\sqrt{\frac{\Phi''(x_1)}{\Phi''(x_3)}}, \quad C_3=1, \qquad (8.6.18)$$

于是

$$\lambda_1 \sim \frac{\sqrt{\Phi''(x_3)}+\sqrt{\Phi''(x_1)}}{2\pi}\sqrt{|\Phi''(x_2)|}\, e^{-[\Phi(x_2)-\Phi(x_1)]/\varepsilon}. \qquad (8.6.19)$$

以下, 我们考虑三个稳定平衡点情况. 为明确起见, 假定

$$\Phi(x_1)<\Phi(x_3)<\Phi(x_2),$$

其中 $x_i(i=1, 2, 3)$ 为 Φ 的局部极小值点, 且假定

$$\Phi(y_1)>\Phi(y_2), \quad x_1<y_1<x_2<y_2<x_3,$$

其中 $y_i(i=1, 2)$ 为 Φ 的局部极大值点(见图 8.6.3). v 的一致展开式由下式给出:

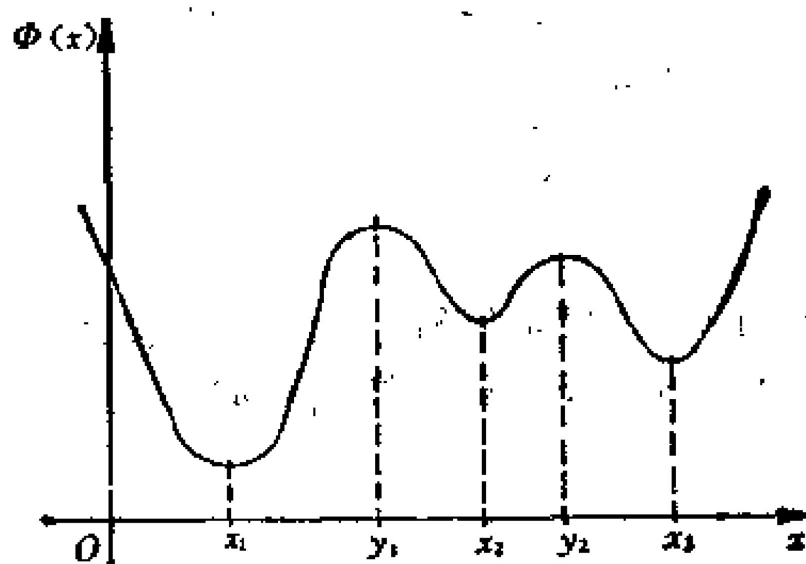


图 8.6.3

$$v \approx \frac{C_2-C_1}{2B_1}\int_0^{(x-y_1)/\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[\frac{\Phi''(y_1)s^2}{2}\right]ds$$

$$+\frac{C_3-C_2}{2B_2}\int_0^{(x-y_2)/\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[\frac{\Phi''(y_2)s^2}{2}\right]ds+\frac{C_1+C_3}{2},$$

其中 $$B_i=\sqrt{\frac{\pi}{2|\Phi''(y_i)|}} \quad (i=1,\ 2)$$

和 $$v(x)\to\begin{cases} C_1, & 如果\ x<y_1, \\ C_2, & 如果\ y_1<x<y_2, \\ C_3, & 如果\ x>y_2. \end{cases}$$

如前面一样，从 $-\infty$ 到 $+\infty$，从 y_1 到 ∞ 以及从 y_2 到 ∞ 积分，便得到下列方程组

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{C_i e^{-\Phi(x_i)/\varepsilon}}{\sqrt{\Phi''(x_i)}}=0, \tag{8.6.20}$$

$$-(C_2-C_1)e^{-\Phi(y_1)/\varepsilon}\sqrt{|\Phi''(y_1)|}$$
$$=2\pi\lambda_1\sum_{i=2}^{3}\frac{e^{-\Phi(x_i)/\varepsilon}C_i}{\sqrt{\Phi''(x_i)}} \tag{8.6.21}$$

和

$$-(C_3-C_2)e^{-\Phi(y_2)/\varepsilon}\sqrt{|\Phi''(x_2)|}=2\pi\lambda_1\frac{C_3e^{-\Phi(x_3)}}{\sqrt{\Phi''(x_3)}}. \tag{8.6.22}$$

方程(8.6.20)蕴涵着 $C_1=0$. 不失一般性，方程(8.6.20)和方程(8.6.21)的解 C_2, C_3 在 $C_1=0$ 时可取为 $C_3=0$ 和 $C_2=1$. 特征值 λ_1 有两个可能的值，即

$$\lambda_{1,1}\sim-\frac{\sqrt{\Phi''(x_3)\,|\Phi''(y_1)|}}{2\pi}e^{-(Q_1+Q_3-P_1)/\varepsilon}$$

和

$$\lambda_{1,2}\sim-\frac{\sqrt{\Phi''(x_2)\,|\Phi''(y_2)|}}{2\pi}e^{-P_2/\varepsilon},$$

其中 $$P_i=\Phi(y_i)-\Phi(x_i)$$

和 $$Q_i=\Phi(y_i)-\Phi(x_{i+1}).$$

显然，$|\lambda_{1,1}|\ll|\lambda_{1,2}|$. 量 $Q=Q_3+Q_2-P_2$ 是布朗运动粒子为达到其最稳定平衡点 x_1 而必须克服的最高势垒的高度 $\Phi(y_1)-\Phi(x_3)$. 以下考虑n个势阱的情况.

$$x_1<y_1<\cdots<x_{n-1}<y_{n-1}<x_n,$$

其中 x_i 为 Φ 的局部极小值点，y_i 为 Φ 的局部极大值点. 因为假定当 $\varepsilon\to 0$ 时，如果

$$y_{i-1}<x<y_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

有 $v_\varepsilon(x)\sim C_i$，所以 v 的一致展开式由下式给定：

$$v_\varepsilon\sim\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(C_{i+1}-C_i)}{2B_i}\int_0^{(x-y_i)/\sqrt{\varepsilon}}e^{\Phi''(y_i)s^2/2}ds+\frac{C_1+C_n}{2}.$$

为了确定 λ_1 和常数 C_i，取 $y_0=-\infty$，$y_n=+\infty$，同前面一样，我们在区间(y_{i-1}, y_i)内积分，便得方程组

$$\begin{aligned}&e^{-\Phi(y_i)/\varepsilon}(C_{i+1}-C_i)\sqrt{|\Phi''(y_i)|}\\&\qquad-e^{-\Phi(y_{i-1})/\varepsilon}(C_i-C_{i-1})\sqrt{|\Phi''(y_{i-1})|}\\&=\frac{2\pi\lambda_iC_ie^{-\Phi(x_i)/\varepsilon}}{\sqrt{\Phi''(x_i)}}\quad(i=1, \cdots, n).\end{aligned}\tag{8.6.23}$$

这里，我们令 $$\Phi''(y_0)=\Phi''(y_n)=0.$$

令

$$\Phi(y_i)-\Phi(x_i)=\varepsilon P_i, \Phi(y_{i-1})-\Phi(x_i)=\varepsilon Q_i$$

以及 $$\sqrt{\Phi''(x_i)|\Phi''(y_j)|}=k_{i,j},$$

我们便可看到方程组(8.6.23)可写成如下形式，即

$$(A-\lambda_1 I)=0,$$

其中 $$C=(C_1, \cdots, C_n)^T, \quad A=\{A_{ij}\},$$

这里 $$A_{i,i}=-(k_{i,i}e^{-P_i}+k_{i,i-1}e^{-Q_i})$$

$$A_{i,i-1}=k_{i,i-1}e^{-Q_i}$$

$$A_{i,i+1}=k_{i,i}e^{-P_i}$$

$$A_{i,j}=0, \text{ 如果} |i-j|>1.$$

因此, $-\lambda_1$ 为 $-A$ 的最小非零特征值. 通过对特征多项式 $S(\lambda)$ 作渐近计算,可以求得

$$S(\lambda)\sim\lambda M+N,$$

其中 N 是 A 的 $n-1$ 阶主子式的和的模, M 是 A 的 $n-2$ 阶主子式的和的模, 这样

$$N=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{j}k_{i,i}\right)\left(\prod_{i=j+2}^{n}k_{i,i-1}\right)e^{-(P_1+\cdots+P_j+Q_{j+2}+\cdots+Q_n)} \tag{8.6.24}$$

和

$$M=\sum\left(\prod_j k_{i_j,i_j}\right)\left(\prod_j k_{i_j,i_j-1}\right)e^{-(P_{i_1}+\cdots+P_{i_k}+Q_{i_{k+1}}+\cdots+Q_{i_{n-2}})}, \tag{8.6.25}$$

其中和式是对所有足标

$$i_1<i_2\cdots<i_k$$

$$i_{k+1}<\cdots<i_{n-2}$$

进行的,而且如果 $j\neq h$, 那么 $i_j\neq i_h$ 以及对所有 $j\leqslant h$ 有

$$i_{j+1}\neq i_{k+h}.$$

通过对 M 和 N 作渐近计算,可以看到

$$\lambda=-\frac{N_1}{M_1},$$

其中 N_1 和 M_1 分别是和式 N 和 M 中的最大项,从而有

$$\lambda_1=\frac{\left(\prod_i k_{i,i}\right)\left(\prod_i k_{i,i-1}\right)}{\left(\prod_j k_{j,j}\right)\left(\prod_j k_{j,j-1}\right)}e^{-Q/a},$$

其中 Q 表示粒子到达最深势阱所必须克服的最高势垒的高度(即 Q 是反应的激活能). 这两个乘积分别跑过那些足标, 它们使得(8.6.24)式和(8.6.25)式中 e 的指数取极小值.

下面,我们计算二维问题的特征值 λ_1. 令

$$\mathbf{x}=(x^1,\ x^2),\quad \mathbf{w}=(w^1,\ w^2)$$

为平面上的布朗运动. 接下来我们考虑过程 $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ 的稳定化问题,这个过程由下列随机微分方程给出:

$$\dot{\mathbf{x}}=-\nabla\Phi(\mathbf{x})+\sqrt{2\varepsilon}\,d\mathbf{w}, \qquad (8.6.26)$$

假定当 $|\mathbf{x}|\to\infty$ 时, $\Phi(\mathbf{x})\to\infty$, 且对所有 $\varepsilon>0$, 有

$$\int e^{-\Phi/\varepsilon}\,d\mathbf{x}<\infty.$$

进一步假定 Φ 仅有两个极小值点 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$, 且 $\Phi(\mathbf{x}_1)<\Phi(\mathbf{x}_2)$, 对于动态系统

$$\dot{\mathbf{x}}=-\nabla\Phi(\mathbf{x}), \qquad (8.6.27)$$

用 Ω_i 表示点 $\mathbf{x}_i(i=1,\ 2)$ 的吸引域, 用 Γ 表示如图 8.6.4 所示的曲线 $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$, 对(8.6.26)式的福克尔-普朗克方程

$$\varepsilon\Delta u+\nabla\cdot(\nabla\Phi u)=u_t$$

$$u(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0,\ 0)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

的解 $u_\varepsilon(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0,\ t)$ 收敛到平稳解

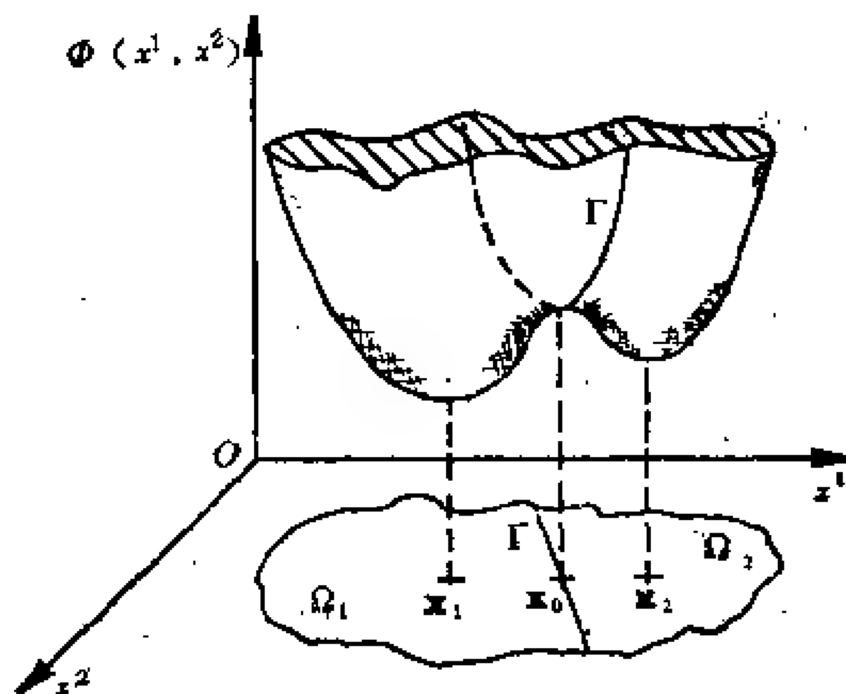


图 8.6.4

$$u^0(\mathbf{x})=\frac{e^{-\Phi/\varepsilon}}{\int e^{-\Phi/\varepsilon}d\mathbf{x}}$$

的速率，同前面一样，由问题

$$\varepsilon\Delta u+\nabla\cdot(\nabla\Phi u)=\lambda u$$

的第一个非平凡特征值 λ_1 确定，或与之相等价，令 $u=e^{-\Phi/\varepsilon}v$，由问题

$$\varepsilon\Delta v-\nabla\Phi\cdot\nabla v=\lambda v \tag{8.6.28}$$

的第一个非平凡特征值确定．可以证明(参看习题8.6.1*)

$$\lambda_1=O(e^{-K/\varepsilon}),$$

从而方程(8.6.28)的简化方程为

$$\nabla\Phi\cdot\nabla u=0. \tag{8.6.29}$$

方程(8.6.29)又可写成

$$\frac{du(\mathbf{x}(t))}{dt}=0,$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 是系统 (8.6.27) 的任意解． 由于当 $t\to\infty$ 时方程(8.6.27)的从 Ω_i 中开始的所有轨线均收敛于 $\mathbf{x}_i$，因此，我们必定有

$$u_0(\mathbf{x})=\begin{cases}C_1, & \text{如果 } \mathbf{x}\in\Omega_1,\\ C_2, & \text{如果 } \mathbf{x}\in\Omega_2,\end{cases}$$

其中 $u_0(\mathbf{x})$ 为第一个特征函数 $u_1(\mathbf{x})$ 的外层展开的首项． Γ 附近的内层可如第8.4节中所述的那样来构造． 在 Γ 附近引入局部坐标 $\mathbf{x}=(s,y)$，其中，如果 $\mathbf{x}\in\Omega_1$，那么 $y=-\mathrm{dist}(\mathbf{x},\Gamma)$；如果 $\mathbf{x}\in\Omega_2$，那么 $y=\mathrm{dist}(\mathbf{x},\Gamma)$，$s$ 是 Γ 中的弧长． 然后再引入伸缩变换 $\eta=-\varepsilon^{-1/2}y$，于是，借助于伸缩变换 η，方程(8.6.28)

可以写成：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\eta b_1(s,\ \sqrt{\varepsilon}\,\eta)\frac{\partial v}{\partial \eta}+b_2(s,\ \sqrt{\varepsilon}\,\eta)\frac{\partial v}{\partial s}+o(1)$$
$$=O(e^{-K/\varepsilon}), \tag{8.6.30}$$

这里$\eta b_1(s, \sqrt{\varepsilon}\,\eta)$和$b_2$分别表示向量$b(\mathbf{x})=-\nabla\Phi(\mathbf{x})$在$\Gamma$附近的法向分量和切向分量．当$\varepsilon\to 0$时，$\Gamma$附近内层展开式的首项$v^0$为方程

$$\frac{\partial^2 v^0}{\partial \eta^2}+\eta B(s)\frac{\partial v^0}{\partial \eta}+C(s)\frac{\partial v^0}{\partial s}=0 \tag{8.6.31}$$

的解，其中$B(s)=b_1(s, 0)>0$；$C(s)=b_2(s, 0)$．由于在$\Phi(\mathbf{x})$于Γ上的任何鞍点处，函数$C(s)$为零，故方程(8.6.31)为可对所有s求解的退化抛物型方程．对于方程(8.6.31)，由对应条件确定的边值问题存在唯一解[79]．对应条件为

$$v^0(\eta,\ s)\to\begin{cases}C_1, & \text{如果 } \eta\to-\infty,\\ C_2, & \text{如果 } \eta\to\infty,\end{cases} \tag{8.6.32}$$

其解$v^0(\eta, s)$由下式给出：

$$v^0(\eta,\ s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(C_2-C_1)\int_0^{\eta\gamma(s)}e^{-s^2/2}ds+\frac{C_1+C_2}{2}, \tag{8.6.33}$$

其中$\gamma(s)$为带有初始条件$\gamma(0)=\sqrt{B(0)}$的贝努利方程

$$\frac{d\gamma}{ds}+\frac{B(s)}{C(s)}\gamma-\frac{1}{C(s)}\gamma^3=0$$

的解，于是$v^0(\eta, 0)$为方程(8.6.31)在$s=0$点的解．选取点$s=0$为Φ在Γ上取极小值的点$\mathbf{x}_0$，于是有

$$\gamma(s)=\left[2\int_0^s C(\sigma)^{-1}\exp\left(-2\int_\sigma^s\frac{B(t)}{C(t)}dt\right)d\sigma\right]^{-1/2}.$$

所以

$$\frac{\partial v^0}{\partial \eta}(0,\ s)=\frac{C_2-C_1}{2\sqrt{\pi}}\gamma(s). \tag{8.6.34}$$

下面我们来确定 C_1 与 C_2 之间的关系. 为此，对方程(8.6.28)两边同乘以因子 $e^{-\Phi/\varepsilon}$ 且积分，便得

$$\int e^{-\Phi/\varepsilon} v\, d\mathbf{x} = 0.$$

运用展开式(8.6.33)，再次得到 $C_1 = 0$，且选取 $C_2 = 1$. 再对方程(8.6.28)的两边同乘以因子 $e^{-\Phi/\varepsilon}$，且在 Ω_2 上积分，得到

$$\varepsilon \int_{\Gamma} e^{-\Phi/\varepsilon} \frac{\partial v^0}{\partial \nu} ds = \lambda_1 \int_{\Omega_1} e^{-\Phi/\varepsilon} v^0 d\mathbf{x}.$$

由(8.6.33)式和(8.6.34)式，得到

$$\lambda_1 \cong \frac{e^{-\Phi(\mathbf{x}_0)/\varepsilon} \gamma(0) / \sqrt{2\Phi''(\mathbf{x}_0)}}{2\pi [e^{-\Phi(\mathbf{x}_2)/\varepsilon} / \mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{x}_2)]}$$
$$= \frac{[-\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0)/\partial \nu^2]^{1/2} e^{[-\Phi(\mathbf{x}_0) - \Phi(\mathbf{x}_2)]/\varepsilon} \mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{x}_2)}{2\pi \sqrt{\Phi''(\mathbf{x}_0)}}$$
$$(8.6.35)$$

其中 ν 为 Γ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处的法向，

$$H(\mathbf{x}_2) = \det \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{i,j=1,2} (\mathbf{x}_2)$$

以及在 Γ 上 $s=0$ 处

$$\Phi''(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{d^2 \Phi}{ds^2} \right|_{s=0}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}_0^i \dot{x}_0^j + \Phi_{x^1}(\mathbf{x}_0) \ddot{x}_0^1 + \Phi_{x^2}(\mathbf{x}_0) \ddot{x}_0^2,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \left(\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds} \right)$$

对于 n 个势阱的情况也可得到类似于(8.6.23)式的方程组；在这一情况中，因子 $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{x}_i)$ 和 $\Phi''(\mathbf{x}_j)$ 也在类似于(8.6.35)式的方程中出现，它们分别是粒子在势阱底部和鞍点处振荡主频率的乘积. 正如方程(8.6.1)中一样，在鞍点处也同样会出现 Φ 的二阶法向导数. 关于 λ_1 表达式中的指数就是这种情况的

激活能.

至于 n 维的情形可按照同样的思路去处理(参看第 8.4 节).

习题 8.6.1*

用瑞利(Rayleigh)商数[12]证明(8.6.28)式中当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\lambda_1 = O(e^{-K/\varepsilon}).$$

利用渐近解作为极小化函数.

8.7 晶体中原子迁移的扩散张量,纳恩斯特-爱因斯坦公式以及斯莫路苏斯基方程的均匀性

现在我们借助(8.5.15)式给出的离出时间及(8.4.22)式给出的离出点的概率分布来计算晶体中原子迁移的扩散矩阵,亦即(8.2.5)式中的 D_{ij}. 设 p_i 表示粒子从孤立转移点 $\mathbf{z}_i$ 离出的概率. 那么由(8.4.22)式,便得

$$p_i = \frac{[\partial^2\phi(\mathbf{z}_i)/\partial v^2]^{1/2}\mathrm{H}^{-1/2}(\mathbf{z}_i)}{\sum_j [\partial^2\phi(\mathbf{z}_j)/\partial v^2]^{1/2}\mathrm{H}^{-1/2}(\mathbf{z}_j)}. \qquad (8.7.0)$$

将(8.7.0)式和(8.5.15)式与(8.2.5)式结合起来,便可获得如下结果:

$$D_{ij} = \frac{1}{\pi\beta m}\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\sum_l\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}(\mathbf{z}_l)\right]^{1/2} \times H^{-1/2}(\mathbf{z}_l) z_l^i z_l^j \cdot e^{-\hat{\Phi}(z_l)/KT}, \qquad (8.7.0')$$

其中 z_l^j 表示向量 $\mathbf{z}_l$ 的第 j 个分量. 项 $\mathscr{H}(\mathbf{0})$, $H(\mathbf{z}_l)$ 以及 $\hat{\Psi}$ 在前面的讨论中已作过解释. 形如 $\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\mathrm{H}^{-1/2}(\mathbf{z})$ 项在芬雅德(Vineyard[90])和格雷得(Glyde[88])的公式中出现,他们所考虑的是空位扩散的另一不同的模型.

我们注意到,在许多问题中,不同方向的扩散系数有不同的

指数率．例如，在六角锌晶体点阵中，在该点阵的一个六角平面中的扩散是各向同性的，然而从一个平面到另一平面的扩散速率却是不相同的，即相差一个指数因子，这就产生了形如(8.2.3)式的扩散方程．考虑到这样的情形，我们必须分别考虑平面中的二维扩散以及从一个平面到另一平面的一维扩散，于是要计算出对应于每一种情况的不同的离出时间．

项 β 表示注入点阵的粒子速度的减缓率．由于粒子通过与点阵的相互作用释放了动能，因而引起了粒子速度的减缓，同时提高了晶体的温度．所以 β 的“粘滞”效应是使扩散系数下降．事实上，实验所得的扩散系数比那些物理文献中仅基于 Ψ 和 m 的计算而得到的预期数值要小一些．这里，提出粘滞因子 β 可以作为此效应的一种可能的解释．

下面，我们对方程(6.1.24)和方程(6.1.25)进行分析．已经证明，它们分别等价于方程(6.1.28)和方程(6.1.30)．方程(6.1.25)有一平衡解 $a=$常数，于是，在有限的张弛时间后，我们希望 a 接近于常数(即 a_σ 和 ∇_r 很小)．所以，我们取

$$a\sim\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n f_n(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ \sigma''),\qquad(8.7.1)$$

其中

$$\mathbf{r}'=\delta\mathbf{r},$$

$$\sigma''=\delta^2\sigma$$

且

$$\delta\ll1.\qquad(8.7.2)$$

变量 $\mathbf{r}'$ 和 σ'' 描述了 a 在空间和时间上的缓慢变化；δ 为一个在最终结果中不出现的人为小参数．由于关于 a 的方程(6.1.25)含有 $\phi(\mathbf{r})$，而 $\phi(\mathbf{r})$ 表示粒子穿过晶胞时具有周期性，所以我们可把每个 f_n 作为 $\mathbf{r}$ 的周期函数来考虑．

将(8.7.1)式和(8.7.2)式代入(6.1.25)式中，并使 δ 的不同幂的系数相等，从而，可得到下列方程

$$0=\lambda\Delta_{\mathbf{r}}f_n-\nabla_{\mathbf{r}}\phi\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f_n+2\lambda\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f_{n-1}-\nabla_{\mathbf{r}}\phi\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}f_{n-1}$$

$$+\lambda\Delta_{\mathbf{r}'}f_{n-2}-\frac{\partial}{\partial\sigma''}f_{n-2}。\tag{8.7.3}$$

在(8.7.3)式中令 $n=0$，便得

$$0=Lf_0=\lambda\Delta_{\mathbf{r}}f_0-\nabla_{\mathbf{r}}\phi\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f_0,\tag{8.7.4}$$

它具有"常数"解

$$f_0=F(\mathbf{r}',\sigma'')。\tag{8.7.5}$$

算子 L 作用到函数 $f(\mathbf{r})$ 空间上，空间中每个函数都以 $\mathbf{r}$ 为周期越过晶胞 C。更明确地说，假定 ∂C 是由 $2n$ 个平面表面组成，且

$$f(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}+\mathbf{l}_i)\quad i=1,\cdots,n,$$

其中 $\mathbf{l}_i$ 为连接第 i 个表面上的一点到其对立表面上对应的点的向量(见图 8.7.1)，关于函数 f 的边界条件可用公式表示。如果 $\mathbf{r}$ 是 ∂C 上第 i 个面上的点，那么 $\tilde{\mathbf{r}}=\mathbf{r}+\mathbf{l}_i$ 就是其对立面上的对应点，且

$$f(\mathbf{r})=f(\tilde{\mathbf{r}}),\quad \mathbf{r}\in\partial C。\tag{8.7.6}$$

可以证明，L 的共轭算子 L^* 为

$$L^*f(\mathbf{r})=\lambda\Delta_{\mathbf{r}}f+\nabla_{\mathbf{r}}f\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\phi,\tag{8.7.7}$$

且

$$L^*\{e^{-\phi(\mathbf{r})/\lambda}\}=0。\tag{8.7.8}$$

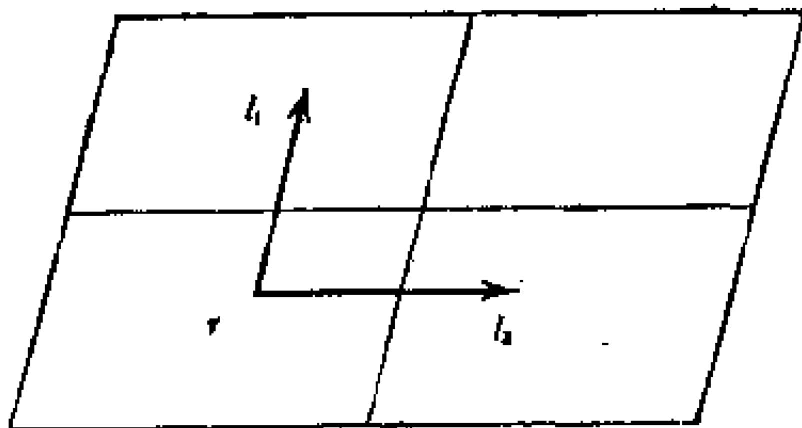


图 8.7.1

接下来，我们在(8.7.3)式中令 $n=1$，可得到

$$0=Lf_1-\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}F(\mathbf{r}',\sigma''). \tag{8.7.9}$$

为了使解 f_1 存在，必须有一个可解条件[12]，这个条件可这样来获得。对方程(8.7.9)两边同乘以因子 $e^{-\phi/\lambda}$，并在晶胞上进行积分，根据(8.7.8)式，就可得到条件

$$0=-\int_C e^{-\phi/\lambda}\nabla_{\mathbf{r}}\phi\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}Fd^3\mathbf{r}=\lambda\int_C\nabla_{\mathbf{r}'}F(\mathbf{r}',\sigma'')\cdot\nabla_{\mathbf{r}}e^{-\phi/\lambda}d^3\mathbf{r}$$

$$=\lambda\nabla_{\mathbf{r}'}F(\mathbf{r}',\sigma'')\cdot\int_{\partial C}\mathbf{n}(\mathbf{r})e^{-\phi/\lambda}d^2\mathbf{r}.$$

但面积分为零，所以，这个可解条件自动满足。

因此，方程(8.7.9)的解为：

$$f_1=[L^{-1}\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})]\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}F(\mathbf{r}',\sigma''), \tag{8.7.10}$$

其中纯量算子 L^{-1} 为 L 的伪逆算子。其定义如下：对于满足

$$0=\int_C e^{-\phi/\lambda}fd^3\mathbf{r}$$

的周期函数 $f(\mathbf{r})$，L^{-1} 就有唯一定义，也即 $L^{-1}f$ 是方程

$$L(L^{-1}f)=f$$

的唯一解，它满足

$$0=\int_C e^{-\phi/\lambda}L^{-1}fd^3\mathbf{r}.$$

下面，我们在(8.7.3)式中令 $n=2$，并应用可解条件，可得

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma''}\left\{\int_C e^{-\phi/\lambda}d^3\mathbf{r}\right\}$$

$$=\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left\{\int_C e^{-\phi/\lambda}[\lambda\mathbf{I}-(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)L^{-1}(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)\right.$$

$$\left.+2\lambda\nabla_{\mathbf{r}}L^{-1}(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)]d^3\mathbf{r}\right\}\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}F. \tag{8.7.11}$$

然而，由格林定理给出

$$\int_C e^{-\phi/\lambda}2\lambda\nabla_{\mathbf{r}}L^{-1}(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)d^3\mathbf{r}=\int_C e^{-\phi/\lambda}2(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)L^{-1}(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)d^3\mathbf{r},$$

从而，方程(8.7.11)就可简化为

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma''}=\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot \mathbf{M}\cdot \nabla_{\mathbf{r}'}F, \tag{8.7.12}$$

其中，定常扩散张量定义为

$$\mathbf{M}=\frac{\int_{C} e^{-\phi/\lambda}[\lambda \mathbf{I}+(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)L^{-1}(\nabla_{\mathbf{r}}\phi)]d^3\mathbf{r}}{\int_{C} e^{-\phi/\lambda}d^3\mathbf{r}} \tag{8.7.13}$$

如果引进 δ 的幂，则(8.7.1)式和(8.7.2)式以及(8.7.5)式就蕴涵：

$$a(\mathbf{r},\ \sigma)=F(\delta_{\mathbf{r}},\ \delta^2\sigma)^{[注]},$$

从而(8.7.12)式便产生

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma}=\nabla_{\mathbf{r}}\cdot \mathbf{M}\cdot \nabla_{\mathbf{r}}a. \tag{8.7.14}$$

下一步，将(6.1.27)式记为

$$p(\mathbf{x},\ t)=e^{-(m/kT)\Phi(\mathbf{x})}u(\mathbf{x},\ t) \tag{8.7.15}$$

其中

$$u(\mathbf{x},\ t)=a\left[\frac{1}{l}\mathbf{x},\ \frac{v_0^2}{\beta l^2}t\right]l^3v_0^3. \tag{8.7.16}$$

由方程(8.7.14)，$u(x,\ t)$满足下列方程

$$\beta\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla_{\mathbf{x}}\cdot \mathbf{D}\cdot \nabla_{\mathbf{x}}u, \tag{8.7.17}$$

其中，

$$\mathbf{D}=v_0^2\mathbf{M}. \tag{8.7.18}$$

方程(8.7.15)表明，斯莫路苏斯基方程的解 $p(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\xi},\ t)$能够由带有初始条件

$$u(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\xi},\ t)\to\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}),\ 当\ t\downarrow 0\ 时 \tag{8.7.19}$$

的纯扩散方程(8.7.17)的解近似地表示出来。在周期势场内，

[注] 原文为 $a(\mathbf{r},\ \sigma)=P(\delta\mathbf{r},\ \delta^2\sigma)$，疑误——译者注

扩散方程(即斯莫路苏斯基方程)的解通过没有任何力场的扩散方程的解近似表示的过程叫做"均匀化"[5].

作为校验,从方程(8.7.13)可看出,当$\Phi=0$时$\mathbf{M}=\lambda\mathbf{I}$. 这样就有$\mathbf{D}=v_0^2\lambda\mathbf{I}=kT/m\mathbf{I}$. 因此,对于$\Phi=0$,被均匀化的斯莫路苏斯基-克拉美方程(8.7.17)就可化为p所满足的原始的斯莫路苏斯基-克拉美方程(6.1.28). 当然,由(6.1.30)式可看出,这些方程中的依变量u和p是恒等的.

最后,我们注意到,还没有从(6.1.29)式推出初始条件(8.7.19)式. 但如前面一样,我们可以看出它可借助于对(6.1.28)式和(6.1.29)式的初始层分析而导出.

接下来,我们来分析(8.7.13)式、(8.7.17)式以及(8.7.18)式关于大激活能的结果,即假定

$$\Phi=O(1/\varepsilon).$$

于是,如在(6.1.12)式中一样,令

$$\phi=\frac{1}{\varepsilon}\phi_0, \tag{8.7.20}$$

因而,(8.7.13)式和(8.7.4)式就变成

$$\mathbf{M}=\frac{\int_C e^{-\phi/\varepsilon\lambda}[\lambda\mathbf{I}+(1/\varepsilon)(\nabla_r\phi)\boldsymbol{\Psi}]d^3\mathbf{r}}{\int_C e^{-\phi/\varepsilon\lambda}d^3\mathbf{r}}, \tag{8.7.21}$$

其中$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})$是越晶胞$C$的周期函数,且它可由方程

$$\lambda\Delta_r\boldsymbol{\Psi}-(\nabla_r\phi\cdot\nabla_r)\boldsymbol{\Psi}=\nabla_r\phi \tag{8.7.22}$$

来定义. 当$\varepsilon\ll1$时,渐近估算$\boldsymbol{\Psi}$,然后用(8.7.21)式我们渐近估算$\mathbf{M}$. 首先,先对通过一个晶胞的周期性边界条件求出问题(8.7.22)的解. 以下使用的方法称为匹配渐近法. 外层解(即简化方程的解),亦就是方程

$$-(\nabla_r\phi\cdot\nabla_r)\boldsymbol{\Psi}=\nabla_r\phi$$

的解为 $$\boldsymbol{\Psi}_1 = -\mathbf{x} + \text{常数}.$$

为了满足周期性条件，加上边界层 $\boldsymbol{\Psi}_2$，使得

$$\boldsymbol{\Psi} \sim \boldsymbol{\Psi}_1 + \boldsymbol{\Psi}_2.$$

在边界 ∂C 附近，我们引入局部坐标，令 y = 沿 ∂C 的法向到边界的距离，$\mathbf{x}'$ = ∂C 上的切向坐标. 在坐标系 $(\mathbf{x}', y)$ 中，并且在 ∂C 上及附近有下列方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial y} = O(\lambda^{-1/2}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial \mathbf{x}'} = O(1).$$

在 ∂C 附近的局部坐标中，边界层 $\boldsymbol{\Psi}_2$ 满足齐次方程 (8.7.22)，即

$$\lambda \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{v}} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial y} + \lambda A(\mathbf{x}', y) \boldsymbol{\Psi}_2 + \mathbf{b}_2(\mathbf{x}', y) \cdot \nabla_{x'} \boldsymbol{\Psi}_2 = 0. \tag{8.7.23}$$

这里，$A(\mathbf{x}', y)$ 为不含 $\partial^2/\partial y^2$ 项的二阶算子. 在边界 $y=0$ 上，项 $-\partial\phi/\partial\boldsymbol{v}$ 为零，而对于正的 y(在晶胞内)，$-\partial\phi/\partial\boldsymbol{v}$ 取正值.

记 $-\partial\phi/\partial\boldsymbol{v} = y b_1(\mathbf{x}') + O(y^2)$，$b_1(\mathbf{x}') > 0$，便得到

$$b_1(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \boldsymbol{v}^2},$$

从而方程(8.7.23)就可写成

$$\lambda \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial y^2} + y b_1(\mathbf{x}') \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial y} + \lambda A(\mathbf{x}', y) \boldsymbol{\Psi}_2 + \mathbf{b}_2(\mathbf{x}', y) \cdot \nabla_{x'} \boldsymbol{\Psi}_2 = 0. \tag{8.7.24}$$

在法向上引入伸缩变换 $y = \lambda^{1/2}\eta$，则方程(8.7.24)就变成

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial \eta^2} + \eta b_1(\mathbf{x}') \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_2}{\partial \eta} + \sqrt{\lambda} A(\mathbf{x}', \sqrt{\lambda}\eta) \boldsymbol{\Psi}_2 + \mathbf{b}_2(\mathbf{x}', \sqrt{\lambda}\eta) \cdot \nabla_{x'} \boldsymbol{\Psi}_2 = 0.$$

当 λ 很小时，我们可忽略项 $\sqrt{\lambda}A(\mathbf{x}', \sqrt{\lambda}\eta)\boldsymbol{\Psi}_2$，且用

$$\mathbf{b}_2(\mathbf{x}')=\mathbf{b}_2(\mathbf{x}', 0)$$

来代替 $\mathbf{b}_2(\mathbf{x}', \lambda\eta)$. 式 $\mathbf{b}_2(\mathbf{x}')$ 表示 ∂C 中特征方向上的微分，而特征方向是由 ∂C 中的方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=-\nabla\phi(\mathbf{x})$$

确定的. 当 $\lambda\to 0$ 时，$\boldsymbol{\Psi}_2$ 展开式中的首项 $\boldsymbol{\Psi}_2^0$ 为边界层方程

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}_2^0}{\partial\eta^2}+\eta b_1(\mathbf{x}')\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}_2^0}{\partial\eta}+\mathbf{b}_2(\mathbf{x}')\cdot\nabla_{x'}\boldsymbol{\Psi}_2^0=\mathbf{0} \quad (8.7.25)$$

的解. 相应条件为：当 $\eta\to\infty$ 时，

$$\boldsymbol{\Psi}_2^0(\mathbf{x}', \eta)\to 0,$$

且 $-\mathbf{x}+\boldsymbol{\Psi}_2^0(\mathbf{x}, 0)$ 具有越晶胞周期性. 从而

$$\boldsymbol{\Psi}\sim-\mathbf{x}+\boldsymbol{\Psi}_2^0(\mathbf{x}, y/\sqrt{\lambda})\zeta(y),$$

此处，当 $0\leqslant y\leqslant\gamma$ 时，有 $\zeta(y)=1$，当 $y>2\gamma$ 时，有 $\zeta(y)=0$，对某个 $\gamma>0$. 通过分部积分，项 $-\mathbf{x}\cdot\nabla\phi/\lambda$ 与 $\lambda\mathbf{I}$ 一起消去，对其余积分的主要贡献来自 ∂C 的邻域内，特别是来自 ϕ 的鞍点的邻域内. 在这种鞍点上，例如说在 $\mathbf{x}_i'$ 上，(8.7.24)式中的项

$$\mathbf{b}_2(\mathbf{x}_i')=\mathbf{0}.$$

由此得出，只需在这些鞍点 $\mathbf{x}_i'$ 上确定 $\boldsymbol{\Psi}_2^0(\mathbf{x}', \eta)$ 就可以了. 关于这种鞍点，方程(8.7.24)便具有这样的形式：

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}_2^0}{\partial\eta^2}+\eta b_1(\mathbf{x}_i')\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}_2^0}{\partial\eta}=\mathbf{0}.$$

满足边界条件的解由下给出：

$$\boldsymbol{\Psi}_2^0(\mathbf{x}', y)\sim\frac{\mathbf{x}_i' b_1^{1/2}(\mathbf{x}_i')}{\sqrt{\pi/2}}\int_{y/\sqrt{\lambda}}^{\infty} e^{-s^2 b_1(\mathbf{x}_i')/2}ds.$$

将(8.7.21)式中分子上的积分围鞍点 $\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_n$ 展开，并将分母上的积分围 ϕ 的极小值点展开，假定

$$\min_C \phi=\phi(\mathbf{0})=0,$$

得到

$$\mathbf{M}_{kl}=\frac{1}{\pi}\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\sum_i\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\nu^2}(\mathbf{z}_i)\right]^{1/2}\mathrm{H}^{-1/2}(\mathbf{z}_i)z_i^k\mathbf{z}_i^l e^{-m\phi(\mathbf{z}_i)/kT},\tag{8.7.26}$$

其中 $H(\mathbf{z})=\det\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i'\partial x_j'}(\mathbf{z}),\ (i,\ j=1,\ 2)$

它是 ϕ 在 ∂O 上的汉赛值，而

$$\mathscr{H}(\mathbf{0})=\det\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{0})\quad(i,\ j=1,\ 2)$$

为 ϕ 在点 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处的汉赛值．用势函数 $\Phi=m\phi$ 表达，则我们在(8.7.26)式中得到一个附加因子 m^{-1}．于是扩散张量为：

$$\mathbf{D}=(1/\beta)\mathbf{M},$$

而

$$\mathbf{D}_{kl}=\frac{1}{\pi m\mu}\mathscr{H}^{1/2}(\mathbf{0})\sum_i\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\nu^2}(\mathbf{z}_i)\right]^{1/2}\mathrm{H}^{-1/2}(\mathbf{z}_i)z_i^k z_i^l e^{-\Phi(\mathbf{z}_i)/kT},\tag{8.7.27}$$

其中，μ 为晶体的摩擦系数或粘滞系数，即

$$\beta=m\mu.$$

公式(8.7.27)与公式(8.7.0′)是等同的．

习题 8.7.1

在一维情况下重复第 8.7 节中的计算，求微分方程的显式解，并把此结果同(8.7.27)式进行比较[55]．

下面，我们来推导纳恩斯特-爱因斯坦公式(参看第8.2节)．在离子晶体中，导电是由于离子受一均匀电场 E 的作用从而通过晶体的运动而起引的，因而，我们可以假定电量为 q 的离子在一势场中运动．在简化的一维模型中，出现在斯莫路苏斯

其方程中的势 Φ 由下式给定

$$m\Phi(x) = -qEx + qK\sin\omega x, \quad A < x < T \tag{8.7.28}$$

且 当 $|x| \to \infty$ 时, $\Phi \to \infty$,

(见图 8.7.2). 这里, 周期项表示晶体的内部位势, 线性项表示外部电场的位势.

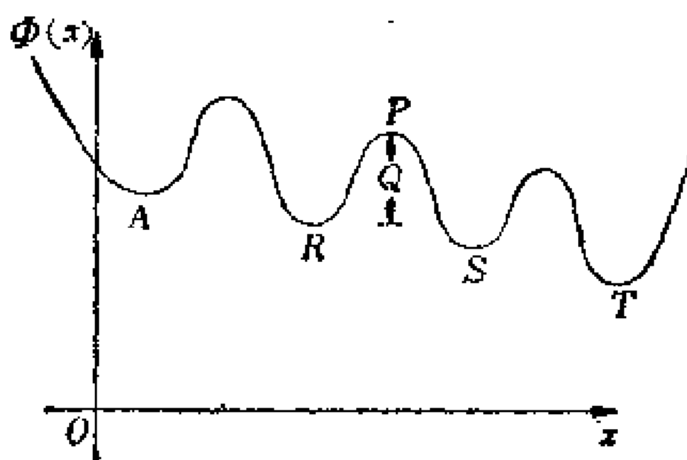


图 8.7.2

在没有扩散的情况下, 陷于 R 点的粒子不能运动到 S, 所以, 仅在一个外部电场 E 作用下是不能引起导电的, 除非这个外部电场很强. 不过, 离子导电性即使对于一个很弱的电场还是能够被察觉的. 因而, 我们可以认为离子的导电性主要是由扩散引起的. 我们注意离子从 R 运动到 S 所克服的势垒为 $Q \doteq \Phi(P) - \Phi(R)$, 它小于离子从 S 运动到 R 所需克服的势垒 $Q^* = \Phi(R) - \Phi(S)$. 因此, 离子的净移动将是从点 R 到点 S. 为了计算晶体的电导率, 我们先来计算从 R 流至 S 的净电流 $i = i_{RS} - i_{SR}$, 且在式

$$\sigma = \left|\frac{\partial i}{\partial V}\right| \tag{8.7.29}$$

中运用之, 其中 $V = \Phi(S) - \Phi(R)$ 是点 S 和点 R 的位势差. 注意到, V 为

$$V = Q - Q^* = -\frac{2\pi qE}{\omega}. \tag{8.7.30}$$

现在, 当电流流向右边时, 其值为

$$i_{RS} = \frac{C_q}{\tau_R}, \tag{8.7.31}$$

而当电流流向左边时, 其值为

$$i_{SR}=\frac{Cq}{\bar{\tau}_L},\tag{8.7.32}$$

其中，$\bar{\tau}_R$ 和 $\bar{\tau}_L$ 分别是克服势垒 Q 和 Q^* 所需要的平均时间，C 表示离子的浓度．我们可看到 $\bar{\tau}_R=\lambda_1^{-1}$，其中 λ_1 是对应于 ϕ 的第二特征值．因此，由(8.6.17)式，有

$$\bar{\tau}_R=\frac{2\pi}{\sqrt{\Phi''(R)|\Phi''(P)|}}e^{mQ/kT},\tag{8.7.33}$$

类似地，有

$$\bar{\tau}_L=\frac{2\pi}{\sqrt{\Phi''(S)|\Phi''(P)|}}e^{mQ^*/kT}.\tag{8.7.34}$$

于是，将(8.7.30)～(8.7.33)式运用到(8.7.27)式中，得到

$$\sigma=\frac{\partial}{\partial V}\frac{C_q}{2\pi m}\sqrt{\Phi''(R)|\Phi''(P)|}\,e^{-mQ/kT}(1-e^{-V/kT}).\tag{8.7.35}$$

这里，我们用到了这样一个事实，即

$$\Phi''(S)=\Phi''(R),$$

它可由(8.7.28)式得出．(8.7.28)式蕴涵着

$$\sqrt{\Phi''(R)|\Phi''(P)|}=\frac{\omega^2Kq}{m}\sqrt{1-\left(\frac{E}{\omega K}\right)^2}.\tag{8.7.36}$$

然后，将(8.7.30)式和(8.7.36)式运用到(8.7.35)式中，得到

$$\sigma=\frac{\partial}{\partial E}\frac{Cq\omega^2K}{4\pi^2m}\sqrt{1-\left(\frac{E}{\omega K}\right)^2}\,e^{-mQ/kT}\left(1-e^{\frac{-2\pi qE}{\omega kT}}\right).\tag{8.7.37}$$

如果

$$\frac{E}{\omega K}\ll 1,$$

那么(8.7.37)式中关于参数 $\frac{E}{\omega K}$ 的渐近展开式中的首项为

$$\sigma_0=\frac{Cq^2\omega K}{2\pi kTm}e^{-H/kT},\tag{8.7.38}$$

其中，
$$H=2Kq$$
为
$$E=0$$
时 mQ 的值．我们回忆一下在习题 8.7.1 中，数值 $\frac{\omega K}{2\pi m}e^{-H/kT}$ 是晶体中原子迁移的一维扩散系数．所以，(8.7.38)式可以写为

$$\sigma_0=\frac{Cq^2D}{kT}. \tag{8.7.39}$$

关于离子导电的这一公式是由纳恩斯特–爱因斯坦推导出来的[31]．由于(8.7.37)式对于小数 $\frac{E}{\omega K}$ 可化为(8.7.39)式，因而，公式 (8.7.37) 为纳恩斯特–爱因斯坦公式的推广．在非各向同性的晶体中，$D=\{D_{ij}\}$ 为扩散张量，从而使得 $\sigma=\{\sigma_{ij}\}$ 为电导张量[69]．

习题 8.7.2

令 $\varepsilon=\frac{kT}{2qK}$，$x=\frac{E}{\omega K}$，证明

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{\pi}\left\{\pi\sqrt{1-x^2}e^{-\pi x/\varepsilon}+(1-e^{-\pi x/\varepsilon})\left(\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x-\frac{\varepsilon}{\omega K\sqrt{1-x^2}}\right)\right\}$$
$$\times\exp\left(\frac{1+x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}}{\varepsilon}\right).$$

习题 8.7.3

试求三维情况下关于电导张量 σ_{ij} 的纳恩斯特–爱因斯坦的推广公式．

第九章 滤波理论

9.1 引言

在许多工程问题中会出现下列的情况，即一个确定信号或随机信号通过噪声信道发送出来，从噪声量测角度对发送出来的信号要进行预估或滤波. 例如，一个未知常值频率信号通过无线电发送并传播出去，而在接收到的信号中往往掺有许多外加的噪声，如天电干扰、发射机和接收机内部的固有噪声等等. 例如话音的传播过程就是这样的情况：扬声器的声音每秒钟进行 5,000 次采样，而在 1/5000 秒的时段中该信号是作为常值信号来传输的. 对于这种情况的滤波问题就是构造一种可实现的预测装置，来确定发射频率. 如果被发射的信号例如说是话音或者是音乐，那么这种信号就不能被认为是确定的信号，于是这种信号便构成了随机模型. 在一般情况下，信号在发射前要经过调制 [例如调幅 (AM) 或调频(FM)]. 图 9.1.1 表示滤波问题的一种简单模型.

随机信号 $x(t)$ (例如传声器输出的电压)经过称为调制的无记忆非线性变换，这样所发射的信号为调制信号 $g(x(t), t)$. 然而，调制信号 $g(x(t), t)$ 会受附加的噪声 $n(t)$ 的干扰，于是

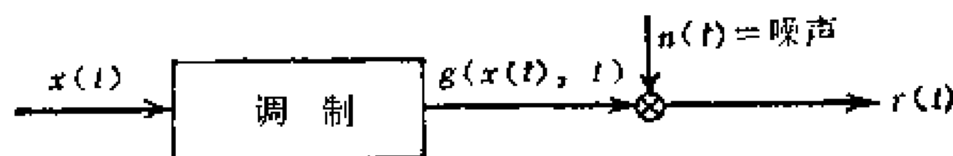


图 9.1.1

接收到的信号 $r(t)$ 就由调制信号 $g(x(t), t)$ 与附加的噪声 $n(t)$ 两部分组成，即

$$r(t)=g(x(t), t)+n(t).$$

调频发射就是调制的一个例子．在声频范围内，也就是说在 16 Hz 至 3,000 Hz 范围内，变化相对缓慢的信号 $x(t)$ 被积分和放大，并且加上一高频载波，从而使得 $x(t)$ 转换为

$$x(t) \to \omega_0 t+d_f\int_0^t x(s)\,ds.$$

然后，对它用 $C\sin(\cdot)$ 进行变换，便得

$$g(x(t), t)=C\sin\left(\omega_0 t+d_f\int_0^t x(s)\,ds\right),$$

其中 C 为发射强度，d_f 称为频偏，ω_0 为高频载波(它在 MHz 范围内)．例如，如果 $x(t)=x_0=$常数，我们可以看到

$$g(x(t), t)=C\sin(\omega_0+d_f x_0)t,$$

因此，$d_f x(t)$ 确实对频率 ω_0 进行了调制．

作为这方面内容的基础教科书可参考 [38]，[88]，[60] 和 [84]．关于调频理论和锁相环路理论可在文献[92]，[60]，[84]，[87]，[6] 以及 [8] 等中找到．

9.2 信号模型

在通信理论中，通常用随机过程 $x(t)$ 作为信号(例如话音或音乐)的模型．更确切地说，输送到调制器内的电压是随机过程 $x(t)$．我们记

$$P(x(t_1)<b_1, \cdots, x(t_n)<b_n)$$

为在时间 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ 输送到调制器内的电压满足不等式 $x(t_i)<b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的概率．通常，我们总假设 $x(t)$ 是平

稳的高斯过程．此外，通常还假定有一个功率谱函数 $S_x(\omega)$，如下给定：

$$S_x(\omega)=\begin{cases} c, & \text{如果 } |\omega|<k, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{9.2.1}$$

其中，c 和 k 均是常数．此时功率谱密度函数定义为

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\omega} Ex(t+s)x(t)\,ds.$$

它表示当频率为 ω 时信号 $x(t)$ 的功率输出，我们今后将假定信号 $x(t)$ 是一个平稳过程［即自相关函数 $Ex(t+s)x(t)$ 与 t 无关］．常数 k 表示信息的带宽．假设 (9.2.1) 式意味着对 $x(t)$，只要它的频率在频带域 $|\omega|<k$ 内便具有相同的功率输出．因此，就可假定白噪声对于所有频率具有相同的功率输出，即对白噪声 $\dot{w}(t)$，有

$$S_{\dot{w}}(\omega)=1,\quad -\infty<\omega<\infty,$$

因为

$$E\dot{w}(t)\dot{w}(t+s)=\delta(s).$$

这就蕴涵着白噪声的全部功率输出为无穷大，而从物理观点来看这是没有意义的．由于满足(9.2.1)式的过程 $x(t)$ 的实现作为随机微分方程的解还是未知的，所以我们作如下讨论．遵循范·曲黎斯 (Van Trees)1970 年所作的讨论，考虑布特屋史(Butterworth)谱族

$$S_n(\omega)=\frac{2n\sin(\pi/2n)}{k[(\omega/k)^{2n}+1]}, \tag{9.2.2}$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，$S_n(\omega)\to S_x(\omega)$．具有由(9.2.2)式给出的功率谱密度函数 $S_n(\omega)$ 的过程 $x_n(t)$ 可以作为伊藤型方程的解来实现，然后用计算机或模拟电路来实现．令

$$H_n(i\omega)=\frac{\sqrt{2n[\sin(\pi/2n)]k^{2n-1}}}{\prod_{j=1}^{n}(\omega-\zeta_j k)},$$

其中，ζ_i 是半平面 $\mathrm{Re}\,\omega<0$ 上 -1 的 $2n$ 次根．那么微分方程

$$L_n x_n(t)=\dot{w}(t), \tag{9.2.3}$$

的解是谱密度(9.2.2)式．其中

$$\int_0^\infty L_n x_n(t)e^{-st}\,dt=H_n(s)\hat{x}_n(s),$$

$$\hat{x}_n(s)=\int_0^\infty e^{-st}x_n(t)\,dt.$$

方程(9.2.3)等价于伊藤随机微分方程组

$$d\mathbf{x}_n(t)=\mathbf{A}_n\mathbf{x}_n(t)dt+\mathbf{B}\,dw, \tag{9.2.4}$$

其中 $\mathbf{x}_n(t)=[x_n(t),\ \dot{x}_n(t),\ \cdots,\ x_n^{(n-1)}(t)]^T$,

$\mathbf{B}$ 为常向量，$\mathbf{A}$ 为常数矩阵[96]．

习题 9.2.1

写出方程(9.2.3)和(9.2.4)当 $n=1$ 和 $n=2$ 时的形式．

通常，一个具有有理函数的功率谱密度函数 $S(\omega)$ 的平稳纯量高斯过程 $x(t)$ 可以表示为 m 阶随机微分方程的一个解，如果当 $|\omega|\to\infty$ 时，$S(\omega)\to 0$．此方程为：

$$x^{(m)}(t)+\alpha_1 x^{(m-1)}(t)+\cdots+\alpha_m x(t)$$
$$=\gamma_1 w^{(m-1)}(t)+\gamma_2 w^{(m-2)}(t)+\cdots+\gamma_m w(t), \tag{9.2.5}$$

其中，α_j 和 γ_j 均是常数．方程的这个解可作为如图9.2.1所示的滤波器的稳态响应来实现．方程组

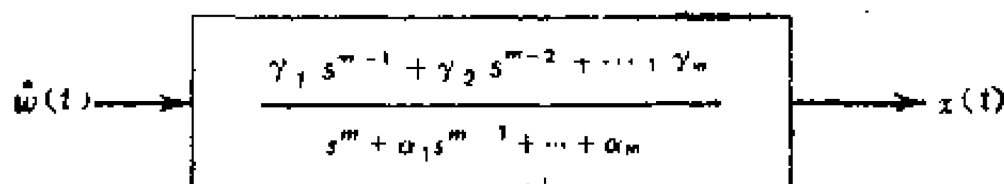


图9.2.1 (参看文献[84])

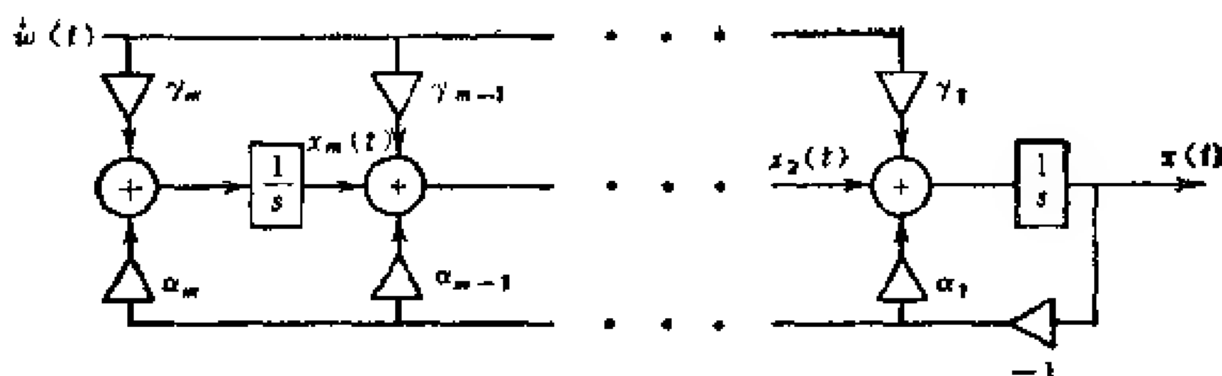


图 9.2.2(参看文献[84])

$$dx_j = [-\alpha_j x_1(t) + x_{j+1}(t)]\,dt + \gamma_j\,dw,\ 1 \leqslant j \leqslant m$$

便是此方程的伊藤表达式，其中 $x_{m+1}(t) \equiv 0$. 这里 $x(t) = x_1(t)$[96, 84]. $x(t)$的另一种可采用的实现由图 9.2.2 给出. 方程(9.2.4)中的矩阵 $\mathbf{A}_m$ 取为

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & & & \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 1 \\ -\alpha_m & & & & 0 \end{bmatrix},$$

向量 $\mathbf{B}_m$ 取为 $\mathbf{B}_m = [\gamma_1, \cdots, \gamma_m]^T$.

为了简单起见，我们假定 $x(t)$ 有一阶布特屋史谱密度，即

$$dx(t) = -kx + \sqrt{2k}\,dw.$$

9.3 信号的调制和量测

信号 $x(t)$ 在发送前需经过调制，最常见的调制类型是调幅(AM). 所谓调幅即是信号经过一个线性变换：

$$g(x(t),\ t) = x(t)\sqrt{2}\sin\omega_0 t, \tag{9.3.1}$$

其中，ω_0 表示载波高频. 被量测到的信号包含外加的噪声 $\sqrt{2N_0}\,\dot{w}$，其中 N_0 是噪声强度. 因此，所量测到的信号 $y(t)$ 为

而

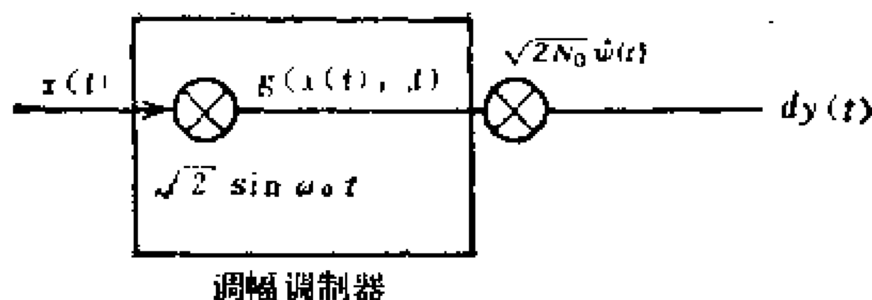


图 9.3.1

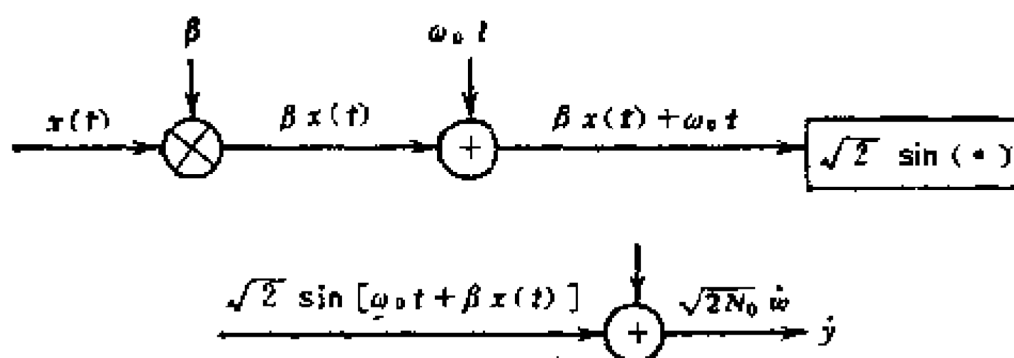


图 9.3.2

$$dy(t)=[x(t)\sqrt{2}\ \sin\omega_0 t]dt+\sqrt{2N_0}dw. \quad (9.3.2)$$

为了使信号强度等于1，在(9.3.2)式中选择了因子$\sqrt{2}$. 图9.3.1为调幅传输原理的简图. 调制的另一种类型是调相(PM)，其中信号经过一非线性变换，即

$$g(x(t),\ t)=\sqrt{2}\sin[\omega_0 t+\beta x(t)]. \quad (9.3.3)$$

假定 $\text{Var}\,x(t)=1$，称β为调制指数. 带噪声的量测由方程

$$dy=\sqrt{2}\sin[\omega_0 t+\beta x(t)]dt+\sqrt{2N_0}\,dw \quad (9.3.4)$$

给定(见图9.3.2).

最后，调频由下列变换给定，即

$$g(x(t),\ t)=\sqrt{2}\ \sin\left[\omega_0 t+d_f\int_0^t x(s)ds\right] \quad (9.3.5)$$

而

$$dy=\sqrt{2}\sin\left[\omega_0 t+d_f\int_0^t x(s)ds\right]dt+\sqrt{2N_0}\,dw. \quad (9.3.6)$$

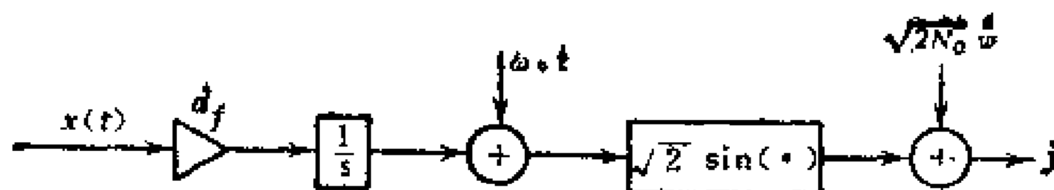


图 9.3.3

(见图 9.3.3). 令

$$x_1(t)=x(t)$$

$$x_2(t)=d_f\int_0^t x_1(s)ds,$$

我们便可得到下面的方程组:

$$dx_1=-kx_1dt+\sqrt{2k}\,dw_1$$

$$dx_2=d_fx_1dt$$

$$dy=\sqrt{2}\sin(\omega_0t+x_2)dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2,$$

其中 w_1 和 w_2 为两个独立的标准布朗运动.

通常,对于通信系统,我们有下列模型:

$$d\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}\,dt+\mathbf{B}\,dw_1$$

$$dy=g(\mathbf{x}(t),\ t)dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2.$$

图 9.3.4 便是这个通信系统模型的方框图.

注意,如果 $\mathbf{x}(t)$ 已知,那么函数 $y(t)-y_0=\int_0^t g(\mathbf{x}(s),\ s)\,ds$ 是一个高斯变量,即

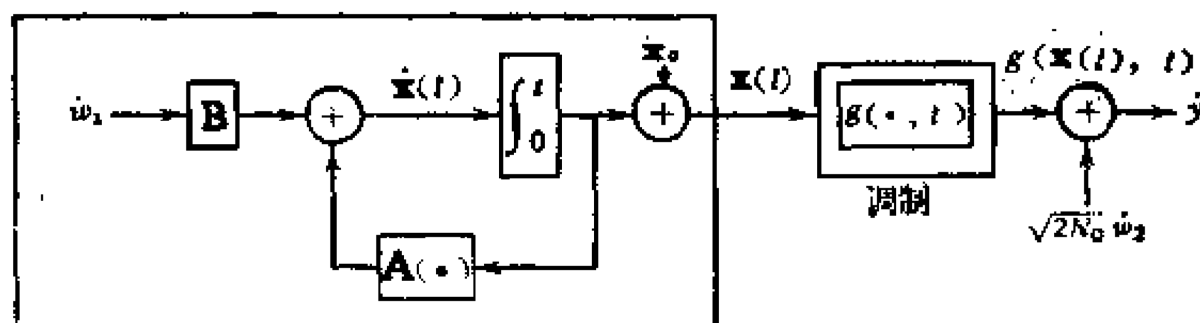


图 9.3.4(参看文献[84])

$$p(dy|\mathbf{x}(t))=\frac{1}{(2\pi N_0 dt)^{n/2}}\exp\left[-\frac{|dy-g(\mathbf{x}(t),\ t)dt|^2}{2N_0 dt}\right].$$

滤波问题就是构造一个估计量 $\hat{x}(t)$，使得均方误差

$$E|x(t)-\hat{x}(t)|^2$$

最小，其中求期望是对给定观察值 $y(s)(0\leqslant s\leqslant t)$ 时的后验分布而取的.

9.4 最优估计量和库西内尔方程

最优估计量 $\hat{x}(t)$ 如下给出:

$$\hat{x}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x(t)=x|y(s),\ 0\leqslant s\leqslant t)\,dx$$

$$=E(x(t)|y(s),\ 0\leqslant s\leqslant t).$$

事实上，设 $\tilde{x}(t)$ 是任一不同于 $\hat{x}(t)$ 的估计量，则

$$\widehat{|x(t)-\tilde{x}(t)|^2}=\widehat{|x(t)-\hat{x}(t)|^2}+\widehat{[x(t)-\hat{x}(t)][\hat{x}(t)-\tilde{x}(t)]}$$

$$+\widehat{|\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)|^2}.$$

由于在求给定 $y(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$ 的条件期望时，$\tilde{x}(t)$ 和 $\hat{x}(t)$ 都是常数，因此，有

$$\widehat{[x(t)-\hat{x}(t)][\hat{x}(t)-\tilde{x}(t)]}=[\hat{x}(t)-\tilde{x}(t)][\widehat{x(t)-\hat{x}(t)}]=0.$$

所以 $$\widehat{|x(t)-\tilde{x}(t)|^2}\geqslant[\widehat{x(t)-\hat{x}(t)}]^2.$$

后验密度 $p(x,\ t,\ y,\ t)\equiv p(x(t)=x|y(s),\ 0\leqslant s\leqslant t)$ 满足库西内尔(Kushner)方程[48]

$$dp=Mp\,dt+[g(x(t),\ t)-E_y g(x(t),\ t)]$$

$$\times[dy-E_y g(x(t),\ t)\,dt]\frac{p}{N_0},\qquad(9.4.1)$$

其中 M 为福克尔-普朗克方程中的算子，E_y 表示用 $p(x,t,y,t)$

求期望．方程(9.4.1)是一个随机积分-偏微分方程．我们将运用库西内尔的推导方法，它也产生了福克尔-普朗克方程的另一种推导．为了简单起见，假定 $x(t)$ 满足一维随机微分方程．由贝叶斯法则(参看习题 1.3.2)，可得

$$
\begin{aligned}
&p(x, t|y, t+\Delta t) \\
&\quad = p(x, t|y, t, \Delta y)\frac{p(\Delta y|x, t, y, t)p(x, t|y, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta y|x, t, y, t)p(x,t|y,t)dx} \\
&\quad = \frac{p(x, t|y, t)\exp\{-|\Delta y - g(x, t)\Delta t|^2/4N_0\Delta t\}}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t|y,t)\exp\{-|\Delta y - g(x,t)\Delta t|^2/4N_0\Delta t\}(1+O(\Delta t))dx}
\end{aligned} \tag{9.4.2}
$$

于是，消去一些因子以后，可得

$$
\begin{aligned}
z(\Delta y, \Delta t) &= \frac{p(x, t|y, t+\Delta t)}{p(x, t|y, t)} \\
&= \frac{\exp\left\{\dfrac{g(x,t)\Delta y}{N_0} - \dfrac{g^2(x,t)\Delta t}{2N_0}\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t|y, t)\exp\left\{\dfrac{g(x,t)\Delta y}{N_0} - \dfrac{g^2(x,t)\Delta t}{2N_0}\right\}dx},
\end{aligned} \tag{9.4.3}
$$

将 z 围绕 $\Delta y=0$, $\Delta t=0$ 展开，并注意到 $E\Delta y^2 = o(\Delta t)$，便得到

$$
\begin{aligned}
z(\Delta y, \Delta t) &= z(0, 0) + z_{\Delta t}(0, 0)\Delta t + z_{\Delta y}(0, 0)\Delta y \\
&\quad + \frac{1}{2} z_{\Delta y \Delta y}(0, 0)\Delta y^2 + o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{9.4.4}
$$

从(9.4.3)式中可看到

$$
z(0, 0) = 1
$$

$$
z_{\Delta t}(0, 0) = \frac{E_y g^2(x(t), t) - g^2(x, t)}{2N_0}
$$

$$
z_{\Delta y}(0, 0) = \frac{g(x, t) - E_y g(x(t), t)}{N_0}
$$

以及

$$2N_0^2 z_{\Delta y\Delta y}(0,\ 0)=g^2(x,\ t)-2g(x,\ t)E_y g(x(t),\ t)$$
$$+2[E_y g(x(t),\ t)]^2-E_y g^2(x(t),\ t).$$
$$(9.4.5)$$

将(9.4.5)式代入(9.4.4)式，且用 Δy^2 的均值 $2N_0\Delta t$ 代替 Δy^2，得到

$$z(\Delta y,\Delta t)=1+\frac{\Delta y\, g(x,t)}{N_0}-\frac{\Delta y E_y g(x(t),\ t)}{N_0}$$
$$-\frac{\Delta t g(x,\ t)E_y g(x(t),\ t)}{N_0}+\frac{\Delta t[E_y g(x(t),t)]^2}{N_0}+o(\Delta t)$$
$$=1+\frac{[\Delta y-\Delta t E_y g(x(t),t)][g(x,t)-E_y g(x(t),t)]}{N_0}+o(\Delta t).$$

因而，由(9.4.3)式便知

$$p(x,\ t|y,\ t+\Delta t)-p(x,\ t|y,\ t)$$
$$=\frac{p(x,t|y,t)[g(x,t)-E_y g(x(t),t)][\Delta y-\Delta t E_y g(x(t),t)]}{N_0}+o(\Delta t)$$
$$\equiv\Delta q+o(\Delta t).$$

由切普曼-柯尔莫哥洛夫方程(4.3.2)以及马尔可夫性质(4.3.1)，我们有

$$p(x,t+\Delta t|y,t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,t+\Delta t|u,t,y,t,\Delta y)p(u,t|y,t+\Delta t)du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\ t+\Delta t|u,\ t)p(u,t|y,t+\Delta t)du.$$

这已经在第二章中证明过了．对任一检验函数 φ，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)p(x,\ t+\Delta t|y,\ t+\Delta t)\,dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)[p(x,\ t|y,\ t+\Delta t)+Mp\Delta t]\,dx+o(\Delta t),$$

其中 M 为福克尔-普朗克方程中的算子．因而，

$$p(x, t+\Delta t|y, t+\Delta t)-p(x, t|y, t)=\Delta q(x, t)+Mp\Delta t+o(\Delta t). \tag{9.4.6}$$

在等式两边同除以 Δt，且令 $\Delta t\to 0$ 取极限，我们就可得到库西内尔方程。

习题 9.4.1

导出下列随机微分方程组的库西内尔方程。令

$$d\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)dt+\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)d\mathbf{w}_1, \tag{9.4.7}$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{A}$ 是 n 维向量，$\mathbf{B}$ 是 $n\times r$ 矩阵，$\mathbf{w}_1$ 是 r 维布朗运动向量并满足

$$Ew_{1i}(t)w_{1j}(t)=\int_0^t Q_{ij}(s)ds,\ \mathbf{Q}(t)=\{Q_{ij}(t)\}.$$

再令

$$dy(t)=\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)dt+d\mathbf{w}_2, \tag{9.4.8}$$

其中 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{g}$ 是 m 维向量，$\mathbf{w}_2$ 是 m 维布朗运动向量满足

$$Ew_{2i}(t)w_{2j}(t)=\int_0^t R_{ij}(s)ds, \mathbf{R}(t)=\{R_{ij}(t)\}.$$

证明库西内尔方程形式为：

$$dp=Mp\,dt+[\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)-E_y\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)]^T\mathbf{R}^{-1}(t)[d\mathbf{y}-E_y\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)]p. \tag{9.4.9}$$

习题 9.4.2

在下面计算的基础上，试给出库西内尔方程的另一种推导法。令

$$d\zeta(t)=\frac{\frac{1}{2}g^2(x(t), t)\,dt+g(x(t), t)dw_2(t)}{N_0}$$

先证明

$$p(x, t|y, t)=\frac{(E_{x,t}e^{\zeta(t)})p(x, t)}{E_{x,t}e^{\zeta(t)}}\equiv\frac{Q}{p}.$$

再证明

$$dQ=Q_t dt+Q_\zeta d\zeta+\frac{\frac{1}{2}g^2(x(t), t)Q_{\zeta\zeta}dt}{N_0}$$

和

$$Q_t=(E_{x,t}e^{\zeta(t)})\frac{\partial p(x, t)}{\partial t}=MQ$$

$$Q_t = Q_{tt} = Q.$$

从而证明 $$dQ = M(Q)\,dt + \frac{g(x(t),t)Q\,dy(t)}{N_0}.$$

运用 $P=\int dQdx$，得

$$dP = \int (dQ)\,dx = P\left[M\left(\int QP^{-1}dx\right)dt + \frac{1}{N_0}\left(\int QP^{-1}g(x,t)dx\right)dy(t)\right]$$
$$= \frac{PE_y g(x(t),t)dy}{N_0}.$$

最后证明

$$d(QP^{-1}) = M(QP^{-1})dt$$
$$+QP^{-1}[g(x,t)-E_y g(x(t),t)]\frac{[dy-E_y g(x(t),t)dt]}{N_0}.$$

于是就可得到方程(9.4.1)式[36].

9.5 估计方程、线性理论和调幅传输

由库西内尔方程，我们就可很容易地得到关于最优估计 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 的随机微分方程．此外，关于函数 $\mathbf{x}(t)$ 的条件期望的伊藤公式的类似方程可由库西内尔方程推导出来．事实上，设 $\varphi(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的一个充分光滑函数，则

$$\begin{aligned}
dE_y\varphi(\mathbf{x}(t)) = \int \varphi(\mathbf{x})\,(dp)\,d\mathbf{x} = \left[\int \varphi(\mathbf{x})M(p)d\mathbf{x}\right]dt \\
+\int \varphi(\mathbf{x})\,[\mathbf{g}(\mathbf{x},t)-E_y\mathbf{g}(\mathbf{x}(t),t)] \\
\times[d\mathbf{y}-E_y\mathbf{g}(\mathbf{x}(t),t)dt]\,p\,d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{9.5.1}$$

记 $E_y\varphi(\mathbf{x}(t))=\hat{\varphi}(\mathbf{x}(t))$，从(9.4.7)式～(9.4.9)式以及(9.5.1)式得到

$$\begin{aligned}
d\hat{\varphi} = \widehat{\nabla\varphi^T\mathbf{A}}\,dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\widehat{\sigma_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}}\,dt + \widehat{[\varphi\mathbf{g}}-\hat{\varphi}\hat{\mathbf{g}}]^T\mathbf{R}^{-1}(t) \\
\times[d\mathbf{y}(t)-\hat{\mathbf{g}}dt],
\end{aligned} \tag{9.5.2}$$

其中 $\sigma=\mathbf{BQB}^T$[38]. 令 $\varphi(\mathbf{x})=x_i$, 我们便得到关于 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 的随机微分方程:

$$d\hat{x}_i(t)=\hat{A}_i(\mathbf{x}(t),t)\,dt+[\widehat{x_i\mathbf{g}}-\hat{x}_i\hat{\mathbf{g}}]^T\mathbf{R}^{-1}(t)[d\mathbf{y}-\hat{\mathbf{g}}\,dt]. \tag{9.5.3}$$

令

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t)&=\widehat{(\mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t))^T}\\&=\widehat{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\mathbf{x}}^T(t)\end{aligned}$$

我们便有

$$d\mathbf{V}=d\widehat{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T}(t)-d\hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\mathbf{x}}^T(t). \tag{9.5.4}$$

取 $\varphi(\mathbf{x})=x_ix_j$ 代入(9.5.2)式,便得到

$$\begin{aligned}d\widehat{(x_ix_j)}=&[\widehat{x_iA_j}+\widehat{A_ix_j}+\hat{\sigma}_{ij}]dt\\&+[\widehat{x_ix_j\mathbf{g}}-\widehat{x_ix_j}\hat{\mathbf{g}}]^T\mathbf{R}^{-1}(t)\,[d\mathbf{y}_j-\hat{\mathbf{g}}_j]\,dt.\end{aligned} \tag{9.5.5}$$

因为 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 是随机微分方程(9.5.3)的解，所以由伊藤公式可得到

$$d(\hat{x}_i\hat{x}_j)=\hat{x}_id\hat{x}_j+\hat{x}_jd\hat{x}_i+[\widehat{x_i\mathbf{g}}-\hat{x}_i\hat{\mathbf{g}}]^T\mathbf{R}^{-1}(t)\,[\widehat{x_j\mathbf{g}}-\hat{x}_j\hat{\mathbf{g}}]\,dt. \tag{9.5.6}$$

因而,由方程(9.5.4)~(9.5.6),有

$$\begin{aligned}dV_{ij}=&\{\widehat{x_iA_j}-\hat{x}_i\hat{A}_j+\widehat{x_jA_i}-\hat{x}_j\hat{A}_i+\hat{\sigma}_{ij}\\&-[\widehat{x_i\mathbf{g}}-\hat{x}_i\hat{\mathbf{g}}]^T\mathbf{R}^{-1}(t)\,[\widehat{x_j\mathbf{g}}-\hat{x}_j\hat{\mathbf{g}}]\}\,dt\\&+[\widehat{x_ix_j\mathbf{g}}-\widehat{x_ix_j}\hat{\mathbf{g}}-\hat{x}_i\widehat{x_j\mathbf{g}}-\hat{x}_j\widehat{x_i\mathbf{g}}\\&+2\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{\mathbf{g}}]^T\mathbf{R}^{-1}(t)[d\mathbf{y}(t)-\hat{\mathbf{g}}\,dt].\end{aligned} \tag{9.5.7}$$

方程(9.5.3)称为**处理方程**,而方程(9.5.7)称为**方差方程**.

对于线性情况，方差方程变成常微分方程，因为在(9.4.7)

式中令

$$d\mathbf{y}(t)=\mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t)\,dt+d\mathbf{w}_2,$$

方程(9.5.7)便产生

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{V}(t)+\mathbf{V}\mathbf{A}^T(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}^T(t)$$
$$-\mathbf{V}(t)\mathbf{M}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{M}(t)\mathbf{V}(t), \qquad (9.5.8)$$

其中, $\mathbf{A}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{B}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{B}(t)\mathbf{x}$. 处理方程变成

$$d\hat{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\,dt+\mathbf{V}(t)\mathbf{M}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)[d\mathbf{y}(t)$$
$$-\mathbf{M}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\,dt]. \qquad (9.5.9)$$

矩阵 $\mathbf{V}(t)$ 决定了由(9.5.8)式和(9.5.9)式所描述的滤波器的增益(见图 9.5.1). 这种滤波器是由卡尔曼和布西(Bucy)发现的,所以称这种滤波器为**卡尔曼-布西滤波器**. 矩阵

$$\mathbf{K}(t)=\mathbf{V}(t)\mathbf{M}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)$$

称为卡尔曼增益. 由于它与观察值 $\mathbf{y}(t)$ 无关,因而可预先作出估算.

图 9.5.1 中的方框与图 9.3.4 中方框是类似的.

习题 9.5.1

证明非线性黎卡提(Riccati)方程(9.5.8)等价于线性系统

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=-\mathbf{A}^T(t)\mathbf{X}+\mathbf{M}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{M}(t)\mathbf{Y}$$

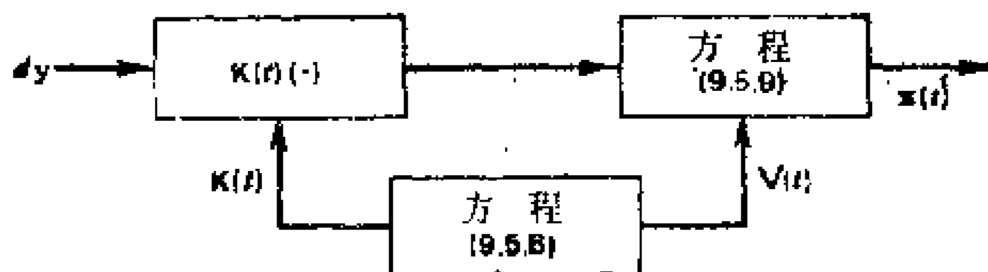


图 9.5.1 卡尔曼-布西滤波器

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{X}+\mathbf{A}(t)\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{I},\ \mathbf{Y}(t_0)=\mathbf{V}(t_0)$$

$$\mathbf{V}(t)=\mathbf{Y}(t)\mathbf{X}^{-1}(t).$$

习题　9.5.2

考虑无调制而有附加白噪声信道的情况，

$$dx=-kx\,dt+\sqrt{2k}\,dw_1$$

$$dy=x\,dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2.$$

写出处理方程和方差方程，并解之．构造一个有关信码、观察和卡尔曼滤波器的方框图．运用方差方程的稳态解来确定卡尔曼增益．

我们通常借助于线性理论来构造调幅传输的卡尔曼滤波器．对于调幅信号，根据(9.3.12)式，有

$$dx=-kx\,dt+\sqrt{2k}\,dw_1 \tag{9.5.10}$$

$$dy=x(t)\sqrt{2}\sin\omega_0 t\,dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2. \tag{9.5.11}$$

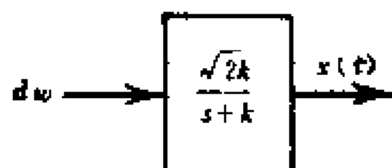


图9.5.2　一阶布特渥史信号

图 9.5.2 表示 $x(t)$ 的实现．

方差方程给定为

$$\dot{V}=\frac{-2k(V-1)N_0-V^2\sin^2\omega_0 t}{N_0}. \tag{9.5.12}$$

因为
$$\sin^2\omega_0 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega_0 t),$$

高频项 $\cos^2\omega_0 t$ 不能通过解调器内的低通滤波器，所以它可以被忽略．于是简化的方差方程便为：

$$\dot{V}\approx-2k(V-1)-\frac{V^2}{2N_0}. \tag{9.5.13}$$

方程(9.5.12)的实现由图 9.5.3 表示．

处理方程如下给出：

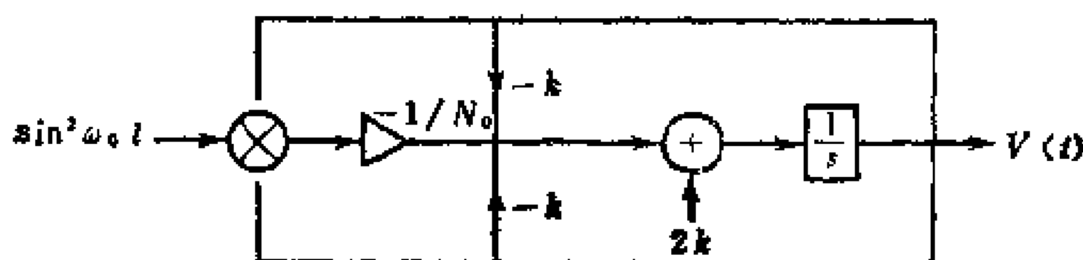


图 9.5.3　方程(9.5.12)的实现

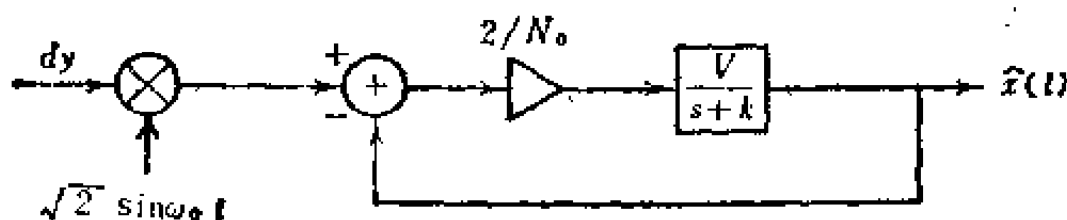


图　9.5.4

$$d\hat{x}=-k\hat{x}dt+\frac{V(t)\sqrt{2}\sin\omega_0 t[dy-\hat{x}(t)\sqrt{2}\sin\omega_0 t dt]}{2N_0}\tag{9.5.14}$$

利用方程(9.5.13)的稳态解，且用

$$V=\frac{-1+\sqrt{1+\Lambda}}{\Lambda/2}=\frac{2}{1+\sqrt{1+\Lambda}}$$

代替 $V(t)$，其中 $\Lambda=1/kN_0$，它表示在带宽中所测量到的信噪比(SNR)，忽略(9.5.14)式中的项 $\hat{x}(t)\cos 2\omega_0 t$(它是由 $\sin^2\omega_0 t$ 变换而来)，我们就有简化的处理方程

$$d\hat{x}=-k\hat{x}(t)dt+\frac{V[\sqrt{2}\sin\omega_0 t dy-\hat{x}(t)dt]}{2N_0}.\tag{9.5.15}$$

方程(9.5.15)的实现由图 9.5.4 表示。

习题　9.5.3

构造一个最优调幅接收器整个实现的方框图

9.6 非线性滤波、调频传输

在非线性的情况下，一般来说处理方程和方差方程都是非线性的随机微分方程，并且要对它们进行积分往往是比较困难的. 因此，就有必要提出一种近似方法. 于是，我们假定有 $\hat{x}(t)$，使得误差 $x(t)-\hat{x}(t)$ 很小，我们将(9.5.3)式中的 $g(x(t), t)$ 关于 $\hat{x}(t)$ 展开为泰勒级数. 为简单起见，就以一维的情况进行讨论. 于是，可得

$$
\begin{aligned}
d\hat{x}(t) = & -[k\hat{x}(t)-k[x(t)-\hat{x}(t)]]dt \\
& +E_y\{(x(t)-\hat{x}(t))[g(\hat{x}(t), t) \\
& +(x(t)-\hat{x}(t))g_x(\hat{x}(t), t)+\cdots]\} \\
& \times\{dy-E_y[g(\hat{x}(t), t)+(x(t) \\
& -\hat{x}(t))g_x(\hat{x}(t), t)+\cdots]\}(2N_0)^{-1} \\
= & -k\hat{x}(t)+g_x(\hat{x}(t), t)E_y(x(t)-\hat{x}(t))^2 \\
& \times[dy-g(\hat{x}(t), t)dt](2N_0)^{-1}+\cdots.
\end{aligned}
\tag{9.6.1}
$$

由于 $g(\hat{x}(t),t)$ 关于 E_y 是常数，故 $\widehat{x(t)-\hat{x}(t)}=0$. 令 $V(t)=\widehat{[x(t)-\hat{x}(t)]^2}$，并在方差方程中利用同样的步骤，便得

$$
\begin{aligned}
dV = & -2k(V-1)dt+V^2g_{xx}(\hat{x}(t), t) \\
& \times[dy-g(\hat{x}(t), t)dt](2N_0)^{-1}+\cdots.
\end{aligned}
\tag{9.6.2}
$$

设 $x^*(t)$ 和 V^* 分别为略去了高阶项的系统(9.6.1)式和(9.6.2)式的解，并且假定初始条件为

$$x^*(0)=\hat{x}_0=\int_{-\infty}^{\infty} x p(x, 0|y, 0)dx,$$

其中，$p(x,0|y,0)$ 是 x_0 的先验密度（即取 x_0 为零均值高斯变量且 $Ex_0^2=1$）；我们同样取 $V^*(0)=V_0=Ex_0^2=1$. $x^*(t)$ 的值就是我们将要用到的 $x(t)$ 的最小均方误差估计近似值。不含有高阶项的方程(9.6.1)称为**近似的处理方程**，而不含有高阶项的方程(9.6.2)称为**近似的方差方程**．注意到如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 两者均满足线性方程，那么方程(9.6.1)和(9.6.2)就是精确的处理方程和精确的方差方程．

接下来，我们考虑调相(PM)的情况．状态方程给定为

$$dx=-kx\,dt+\sqrt{2k}\,dw_1, \tag{9.6.3}$$

$$dy=\sqrt{2}\sin(\omega_0t+\beta x(t))dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2. \tag{9.6.4}$$

令 $\omega_0t+\beta x(t)=\theta(t)$, $\omega_0t+\beta x^*(t)=\theta^*(t)$，于是我们便可写出近似方差方程，其形式为

$$\dot{V}^*=-2k(V^*-1)-\frac{\beta^2V^2}{N_0}\sin\theta^*\sin\theta-\frac{-\beta^2V^{*2}}{\sqrt{N_0}}\dot{w}_2\sin\theta$$
$$-\frac{\beta^2V^{*2}}{N_0}\sin^2\theta^*. \tag{9.6.5}$$

由于
$$\sin\theta^*\sin\theta=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\theta^*)+\cos(\theta+\theta^*)]$$

和
$$\theta+\theta^*=2\omega_0t+\beta[x(t)+x^*(t)],$$

于是，低通滤波器将消除高频项 $\cos^2\theta^*$ 及 $\cos(\theta+\theta^*)$．这样，方程(9.6.5)可简化为

$$\dot{V}^*=-2k(V^*-1)-\frac{\beta^2V^{*2}}{2N_0}[\cos(\theta-\theta^*)+1+\sqrt{N_0}\dot{w}_2\sin\theta]. \tag{9.6.6}$$

低通滤波器抑制高频项这一过程称为**外差作用**．在近似表示式中，我们用 1 来代替 $\cos(\theta-\theta^*)$，并且由于对任何 $\varepsilon>0$，当 $N_0\to0$ 时，有

$$P(|\sqrt{N_0}\,\dot{w}_2|>\varepsilon)\to0,$$

所以，我们可略去(9.6.6)式中的最后一项．于是得到简化后的方程：

$$\dot{V}^*=-2k(V^*-1)-\frac{\beta^2V^{*2}}{N_0}.$$

在稳态 $\dot{V}^*=0$ 情况下，使得

$$V^*=\frac{2}{1+\sqrt{1+2\beta^2\Lambda}},\ \Lambda=\frac{1}{kN_0}.$$

处理方程如下给定：

$$dx^*=-kx^*dt+\frac{\beta^2V^*\cos(\omega_0t+\beta x^*(t))dy}{N_0}.$$

习题 **9.6.1**

试构造一个关于调频传输的信码、调制和解调的方框图．

9.7 调频传输和锁相环路中的跳周现象

调频传输中所量测到的信号由下式给出：

$$dy=\sqrt{2}\sin\left[\omega_0t+d_f\int_0^t x(s)ds\right]dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2$$

$$\equiv g(u(t),\ t)+\sqrt{2N_0}\,dw_2,$$

其中

$$u(t)=\int_0^t x(s)ds.$$

假定 $x(t)$ 满足方程

$$dx(t)=-kx(t)dt+\sqrt{2k}\,dw_1.$$

于是有下列方程组：

$$dx(t)=-kxdt+\sqrt{2k}\,dw_1 \tag{9.7.1}$$

$$du=xdt \tag{9.7.2}$$

$$dy=\sqrt{2}\sin[\omega_0t+d_fu(t)]dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2. \tag{9.7.3}$$

令 $u(t)=x_0(t)$, $x_1(t)=x(t)$,

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -k\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}(t)=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2k}\end{pmatrix},$$

方程(9.7.1)和(9.7.2)就可写成

$$d\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}\,dt+\mathbf{b}\,dw_1. \tag{9.7.4}$$

在实际情况中,已知有好几种调频解调器,其中有些是以所谓锁相环路(PLL)为基础的,关于锁相环路理论已在文献[60]和[92]中作了广泛的讨论.

我们所讨论的是包含锁相环路解调器的一个调频接收器,图9.7.1便是锁相环路的简单示意图.

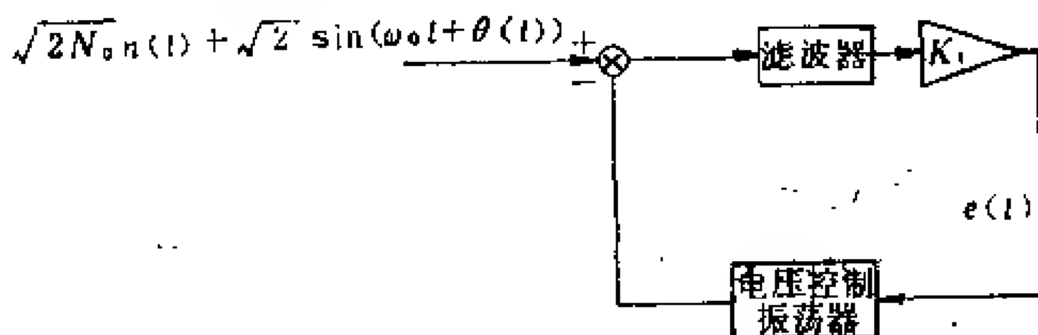


图9.7.1 锁相环路

锁相环路是一种重要的装置,它广泛使用于通信、声纳、雷达等系统. 以下我们将进一步研究锁相环路的作用,滤波器 F 的(准)最优结构以及接收误差.

进入环路的信号 $g+\sqrt{2N_0}\,n(t)$ 含有外加噪声 $\sqrt{2N_0}\,n(t)$(如天电干扰、输送器内部的固有噪声等).

我们知道(参看习题3.4.9)$n(t)$ 能够表达为

$$n(t)=\sqrt{2}\,(n_1(t)\sin\omega_0 t+n_2(t)\cos\omega_0 t),$$

其中, $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 是两个独立的白噪声. 参数 N_0 为噪声强度,并且称 $1/N_0$ 为信噪比(SNR). 电压控制振荡器产生一个余弦波,它的频率由输入电压 $e(t)$ 控制,即

$$H(t)=\sqrt{2}K_3\cos[\omega_0 t+\hat{\theta}_2(t)],$$

其中 $\dot{\theta}_2(t)=K_2 e(t)$. 常数 $K_i(i=1, 2, 3)$ 表示增益, 符号 ⊗ 表示所接收到的信号 $g+\sqrt{2N_0}\,n(t)$ 乘以 $H(t)$, 其结果为

$$\begin{aligned}
&[g+\sqrt{2N_0}\,n(t)]\,H(t)\\
&\quad=2K_3\{\sin[\theta_1(t)-\theta_2(t)]\\
&\qquad-\sqrt{2N_0}\,n_1(t)\sin\theta_2(t)\\
&\qquad+\sqrt{2N_0}\,n_2(t)\cos\theta_2(t)\\
&\qquad+\sin[2\omega_0 t+\theta_1(t)+\theta_2(t)]\\
&\qquad+\sqrt{2N_0}\,n_1(t)\sin[2\omega_0 t+\theta_2(t)]\\
&\qquad+\sqrt{2N_0}\,n_2(t)\cos[2\omega_0 t+\theta_2(t)]\}.
\end{aligned}$$

由于低通滤波器 F 抑制高频项, 从而使得经滤波和放大后的信号由下式给出:

$$\begin{aligned}
e(t)=K_1K_3F(s)\{&\sin[\theta_1(t)-\theta_2(t)]-\sqrt{2N_0}\,n_1(t)\sin\theta_2(t)\\
&+\sqrt{2N_0}\,n_2(t)\cos\theta_2(t)\},
\end{aligned}$$

其中 $F(s)$ 是一个线性算子, 它表示线性滤波器 F 的效应(见图 9.7.2). 项

$$n'(t)=-n_1(t)\sin\theta_2(t)+n_2(t)\cos\theta_2(t)$$

仍然表示一个白噪声. 图 9.7.2 是锁相环路的方框图. 图中 $K=K_1K_2K_3$. 滤波器 $F(s)$ 可采用各种方法进行选择. 例如, 考虑 $F(s)=1$ 且 $x(t)=\omega-\omega_0=$常数的情况. 那么, 令 $\varphi(t)=$

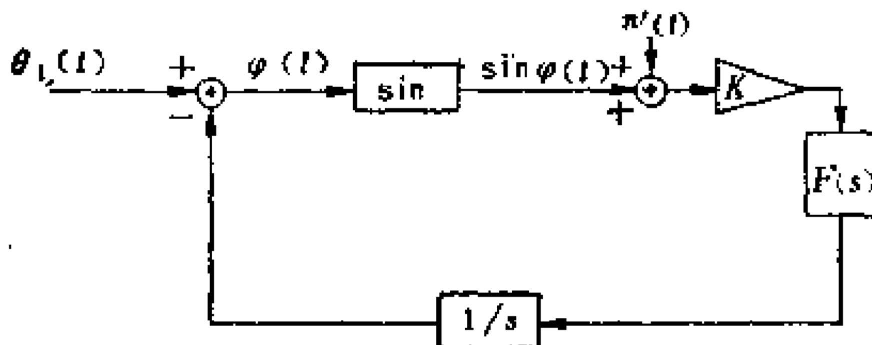


图 9.7.2 锁相环路方框图

$\theta_1(t)-\theta_2(t)$，并且注意到 $\theta_1=\omega t$, $\dot{\theta}_2=K_2e(t)$. 可得到

$$\dot{\varphi}=\dot{\theta}_1(t)-K_2e(t)=\dot{\theta}_1(t)-K\sin\varphi-Kn'(t)$$

或
$$\dot{\varphi}=\omega-\omega_0-K\sin\varphi-Kn'(t).$$

如果 $\omega=\omega_0$ 且环路中没有噪声，那么就可得到关于相位误差 φ 的常微分方程

$$\dot{\varphi}=-K\sin\varphi.$$

方程的临界点是

$$\varphi=n\pi \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

点 $\varphi=(2n+1)\pi$ 是不稳定平衡点，而点 $\varphi=2n\pi$ 是稳定平衡点. 因此，环路锁定在适当的相位 $(\mathrm{mod}\,2n\pi)$ 上，当 φ 是常数时频率误差为 $e_x(t)=\dot{\varphi}=0$.

当环路中有噪声时，在这种情况下得到方程

$$\dot{\varphi}=-K\sin\varphi-Kn'(t)$$

或

$$d\varphi=-K\sin\varphi\,dt-\sqrt{2N_0}\,dw, \tag{9.7.5}$$

其中 $2N_0$ 为噪声强度. 噪声一定迫使解 $\varphi(t)$ 在一有限时间内离开给定的平衡状态，比如离开 $\varphi=0$ 状态. 更具体地说，如果噪声强度很小 (SNR≫1)，这种情况在通信系统中是常见的，解 $\varphi(t)$ 将在平衡状态(如 $\varphi=0$)附近停留一段很长的时间，然后进入 $\varphi=2\pi$ 的邻近状态. 接着，它又在新的稳定状态附近停留很长一段时间. 当这样的转移发生时，我们就说环路有失锁现象，或者说环路已经跳跃了一个周期. 周期跳跃的结果是一个可听得到的"卡搭"声，这个声响是由于跳跃导致频率估计发生了剧烈的变化而产生的. 跳周现象是一件令人相当烦恼的事，例如，它在雷达测距中就可能会引起相当大的误差. 因此，尤其从环路的设计观点出发，弄清跳周频率对于环路参数的依赖关系是至关重要的. 这个问题与离出问题，或者晶体中一维原子迁移

问题是相同的，这个问题的答案可在下面的习题中找到。

习题 9.7.1

把跳周问题看作是质点在位势场中的布朗运动问题，其中位势由$\Psi=K\cos\varphi$给出．写出关于跳周期望时间的邓肯方程，并解之[92]。

现在回到用可能的最优方法选择滤波器 $F(s)$ 的问题．对方程组(9.7.1)～(9.7.3)运用近似的处理方程和近似的方差方程，可以看到，在这种情况下我们需要考虑处理方程组，所以，同样也要考虑协方差方程组。

习题 9.7.2

证明：如果 $\mathbf{x}(t)$ 满足线性方程组

$$d\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\,dt+\mathbf{B}(t)\,d\mathbf{w}_1$$

且 $\mathbf{y}(t)$ 满足非线性方程组

$$d\mathbf{y}(t)=\mathbf{g}(\mathbf{x}(t),\ t)\,dt+\sqrt{\mathbf{N}_0}\,d\mathbf{w}_2,$$

其中 $\mathbf{N}_0$ 是 $\mathbf{w}_2(t)$ 的协方差矩阵，则近似的处理方程和近似的协方差方程为

$$d\mathbf{x}^*(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t)\,dt+\mathbf{V}^*(t)\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),t)\mathbf{N}_0^{-1}[d\mathbf{y}-\mathbf{g}(\mathbf{x}^*(t),t)dt]$$

和
$$d\mathbf{V}^*(t)=[\mathbf{A}(t)\mathbf{V}^*(t)+\mathbf{V}^*(t)\mathbf{A}^T(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^T(t)]dt.$$

由方程组(9.7.3)和(9.7.4)，我们可找到一个近似的最优调频解调器．方程组(9.7.3)和(9.7.4)的近似的处理方程和近似的方差方程分别由下式给出：

$$d\mathbf{x}^*(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}^*\,dt+\begin{bmatrix}v_{00}^*\\ v_{01}^*\end{bmatrix}\frac{d_f\sqrt{2}}{2N_0}\cos[\omega_0t+d_f u^*(t)]\,dy \tag{9.7.6}$$

和

$$
d\mathbf{V}^*(t)=\left[\mathbf{A}\mathbf{V}^*(t)+\mathbf{V}^*(t)\mathbf{A}^T+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2k\end{pmatrix}\right]dt
$$

$$
-\frac{d_f^2\sqrt{2}}{2N_0}\begin{bmatrix}v_{00}^{*2} & v_{00}^*v_{01}^*\\ v_{01}^*v_{00}^* & v_{01}^{*2}\end{bmatrix}\sin[\omega_0 t+d_f u^*(t)]\,dy, \tag{9.7.7}
$$

其中

$$
\mathbf{V}^*=\begin{bmatrix}v_{00}^* & v_{01}^*\\ v_{01}^* & v_{11}^*\end{bmatrix}
$$

(参看文献[84]).

如调相情况一样，我们用 $g(u(t),\ t)\,dt+\sqrt{2N_0}\,dw_2$ 代替 dy，并且略去高阶项(外差作用)，便得到方差方程，其形式为

$$
\dot{\mathbf{V}}^*=\mathbf{A}\mathbf{V}^*+\mathbf{V}^*\mathbf{A}^T+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2k\end{pmatrix}-\frac{d_f^2}{2N_0}\begin{bmatrix}v_{00}^{*2} & v_{00}^*v_{01}^*\\ v_{01}^*v_{00}^* & v_{01}^{*2}\end{bmatrix}.
$$

方程的稳态解为

$$
d_f^2v_{00}^*=\frac{4\beta\Lambda^{-1/2}}{1+\sqrt{1+2\beta\Lambda^{1/2}}},
$$

$$
d_fv_{01}^*=\frac{4\beta}{(1+\sqrt{1+2\beta\Lambda^{1/2}})^2}
$$

$$
v_{11}^*=\frac{1-4\beta^2\Lambda}{(1+\sqrt{1+2\beta\Lambda^{1/2}})^4}, \tag{9.7.8}
$$

其中 $\beta=d_f/k$，$\Lambda=1/kN_0$.

由于在大多数实际情况下 $\beta\Lambda^{1/2}\gg1$，因此对于信噪比高的情况，我们有近似公式

$$
d_f^2v_{00}^*=\frac{4\beta\Lambda^{-1/2}}{1+\sqrt{1+2\beta\Lambda^{1/2}}}\approx2\sqrt{2\beta}\,\Lambda^{-3/4} \tag{9.7.9}
$$

$$
d_fv_{01}^*=\frac{4\beta}{(1+\sqrt{1+2\beta\Lambda^{1/2}})^2}\approx2\Lambda^{-1/2}. \tag{9.7.10}
$$

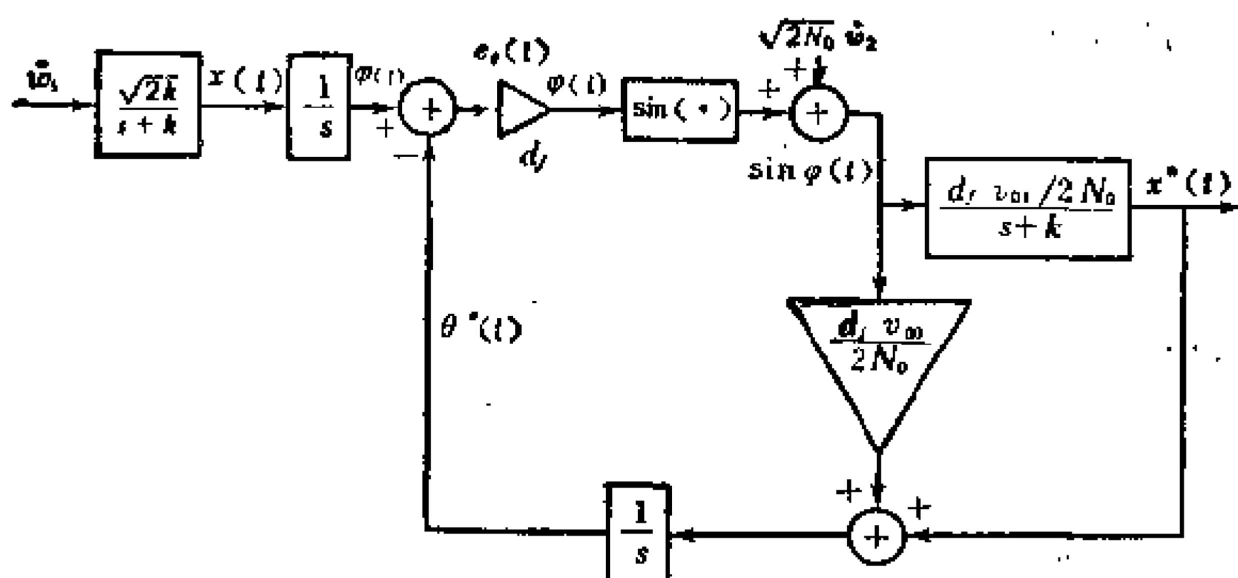


图 9.7.3 次优锁相环路方框图

图 9.7.3 为方程组(9.7.6)和(9.7.7)所表示的准最优调频解调器的方框图. 我们用 $x^*(t)$ 作为 $x(t)$ 的环路估计, 从而 $e_x(t)=x(t)-x^*(t)$ 为估计误差. 过程 $\theta(t)$ 表示相位, $\theta^*(t)$ 是 $\theta(t)$ 的环路估计. 全部相位误差由 $\varphi(t)=d_f(\theta(t)-\theta^*(t))$ 给出. 所以, 描述锁相环路的方程组由下式给出:

$$de_x=-\left[ke_x+\frac{v_{01}^*d_f}{2N_0}\sin\varphi\right]dt+\left[\sqrt{2k}\,dw_1-\frac{v_{01}^*d_f}{\sqrt{2N_0}}\,dw_2\right] \tag{9.7.11}$$

$$d\varphi=\left[d_fe_x-\frac{v_{00}^*d_f^2}{\sqrt{2N_0}}\sin\varphi\right]dt-\frac{v_{00}^*d_f^2}{\sqrt{2N_0}}\,dw_2. \tag{9.7.12}$$

(参看文献[84]). 运用公式(9.7.9)和(9.7.10), 令

$$\varepsilon=2\sqrt{2\beta}\,\Lambda^{-3/4},\ \ \xi=\sqrt{2\beta}\,e_x\Lambda^{-1/4}$$

且作时间变换

$$t'=\frac{t}{\gamma},\ \ \gamma=\frac{1}{\sqrt{2\beta}\,k\Lambda^{1/4}},$$

于是, 根据布朗变形定律(2.1.16(ii)式), 得到方程 (9.7.11) 和

(9.7.12)的变形方程:

$$d\xi(t')=-(\delta\xi+\sin\varphi)dt'+(dw_1'-dw_2')\sqrt{\varepsilon}. \tag{9.7.13}$$

$$d\varphi(t')=\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)dt'-dw_2'\sqrt{\varepsilon} \tag{9.7.14}$$

其中 $\delta=(\varepsilon/8\beta^2)^{1/3}$, $dw_i'(t')=(1/\sqrt{\gamma})\,dw_i(t)(i=1,2)$. 方程 (9.7.13) 和 (9.7.14) 的系数关于 φ 是周期的,因此,对 φ 的 2π 周期的"跳跃"不会给系统带来任何改变. 由于频率 $x(t)$ 与 $\dot{\theta}$ 成正比, 因而在 θ 的估计 θ^* 中 2π 的误差会引起 x^* 的剧烈变化,这就是我们所听到的"卡搭"声. 显然,这种频繁的"卡搭"声音会使传输信码模糊不清. 这种干扰频率的一个自然的量度是干扰间的平均时间 E_τ,它的计算是下一节所要讨论的内容. 从数学观点来看,方程(9.7.13)和(9.7.14)表示了动态系统

$$\dot{\xi}=-\sin\varphi-\delta\xi \tag{9.7.15}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi \tag{9.7.16}$$

的微小随机摄动,该系统在 $\xi=0$, $\varphi=2\pi j(j=0, \pm1, \cdots)$有稳定平衡点. 由于系统(9.7.15)和(9.7.16)的所有当 $t\to\infty$ 时而保持有界的解,都收敛于平衡点,从而使得起始于一个给定稳定平衡点的吸引区域内的轨线将不进入另一稳定平衡点的吸引区域. 然而, 即使一个最轻微的随机摄动在一有限时间内会引起交扰. 所以, 锁相环路中的跳周现象可在数学上描述为由稳定系统的随机驱动所引起的不稳定性. 更确切地说, 解 $(\xi(t), \varphi(t))$ 在吸引点,如 $\xi=0$ 及 $\varphi=0$ 附近停留一段较长的时间, 所以,只要轨线穿进如 $\xi=0$ 和 $\varphi=\pm2\pi$ 的吸引区域, 就说发生了跳周. 如果 D 表示 $\xi=0$, $\varphi=0$ 的吸引区域, 那么, 跳跃时间定义为

$$\tau = \inf\{t \mid (\xi(t), \varphi(t)) \in \partial D\},$$

其中 ∂D 为 D 的边界[8]。

9.8 锁相环路中平均跳周时间的计算

我们先从点 $\xi=0$ 和 $\varphi=0$ 的吸引区域 D 以及它的边界 ∂D 的描述着手。诸吸引点均位于 φ 轴上，且由鞍点 $\varphi=(2n+1)\pi(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$ 把它们分隔，四条收敛于点 $\xi=0$ 和 $\varphi=\pm\pi$ 的轨线形成了原点的吸引区域 D 的边界 ∂D（见图 9.8.1）。

图 9.8.1 区域 D

将系统(9.7.15)式和(9.7.16)式在 $\xi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 附近线性化，便可看到，如果 ε 很小，则 δ 便可忽略，而且可看出分隔曲线就是系统(9.7.15)和(9.7.16)式的解，且有如下性质：在 $\xi=0$ 和 $\varphi=\pm\pi$ 上满足

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{1-\sqrt{8}}{2}.$$

对方程(9.7.13)和(9.7.14)而言，跳周之间的期望时间是该系统从 D 首次离出的期望时间，其中 φ 按 $\mathrm{mod}(2\pi)$ 来取。这样，期望跳跃时间

$$v(\xi,\ \varphi)=E\{\tau \mid \xi(0)=\xi,\ \varphi(0)=\varphi\}$$

是邓肯方程(5.4.5)，即方程

$$L_\varepsilon v=\varepsilon\left(v_{\xi\xi}+b_{\xi\varphi}+\frac{1}{2}v_{\varphi\varphi}\right)-(\sin\varphi+\delta\xi)v_\xi$$

$$+\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)v_\varphi=-1,\quad 在\ D\ 中,$$

$$v=0,\quad 在\ \partial D\ 上 \tag{9.8.1}$$

的解．由于 δ 很小，因而可忽略项 $\delta\xi v_\xi$．当 $\varepsilon\to 0$ 时，可按照第八章中叙述的方法来构造渐近解．首先注意到，对方程(9.8.1)，由极大值原理，得到如下界限：

$$v\leqslant C(\varepsilon)e^{H/\varepsilon},$$

其中 H 是一常数，且当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$C(\varepsilon)=o(e^{H/\varepsilon}). \tag{9.8.2}$$

所以，我们可对 v 作如下换算：

$$v(\xi,\ \varphi)=C(\varepsilon)e^{H/\varepsilon}u(\xi,\ \varphi); \tag{9.8.3}$$

其中 H 是一待定常数，$C(\varepsilon)$ 满足 (9.8.2) 式，且 $\max u(\xi,\ \varphi)=1$，这是我们的算式．忽略超越无穷小项，$u(\xi,\ \varphi)$ 的方程可以如下给出：

$$L_\varepsilon u\sim 0,\quad 在\ D\ 中,$$

$$u=0,\quad 在\ \partial D\ 上,$$

$$\max_D u=1.$$

因为在边界 ∂D 上的 $v=0$，在 D 中的每个点上当 $\varepsilon\to 0$ 时，$v\to\infty$．所以，函数 $u(\xi,\ \varphi)$ 在边界 ∂D 附近从 0 急剧变化到 1．

现在，我们来构造 u 的边界层展开式．设 y 为点到边界的距离，又设 x' 为边界切线方向上的坐标，则在边界 ∂D 附近的局部坐标 $(x',\ y)$ 中，方程(9.8.1)给定为

$$\varepsilon u_{yy}+yb_0(x')u_y+L_1u=0, \tag{9.8.4}$$

其中，当 $y\to 0$ 时

$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\xi-\sin\varphi \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{\nu}=yb_0(x')+O(y^2),$$

$\boldsymbol{\nu}$ 表示边界 ∂D 的外法向，$b_0(x')$ 表示函数

$$b(x',\ y)=\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\xi-\sin\varphi \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{\nu}$$

在 $y=0$ 附近的泰勒展开式中首项的系数．注意，由系统(9.7.15)及(9.7.16)式(在其中令 $\delta=0$)，可知向量

$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\xi-\sin\varphi \end{pmatrix}$$

为边界 ∂D 的切向，所以，$b(x',\ 0)=0$．表达式 L_1u 包含 u 的切向导数和混合导数．令 $\eta=y/\sqrt{\varepsilon}$，我们可得方程

$$u_{\eta\eta}+\eta b_0(x')u_\eta+L_1u=0. \tag{9.8.5}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，L_1u 中的二阶项为 $O(\sqrt{\varepsilon})$．边界条件为

$$u(x',\ \eta)\to0,\ \text{当 }\eta\to0\text{ 时}.$$
$$u(x',\ \eta)\to1,\ \text{当 }\eta\to\infty\text{ 时}.$$

为了确定(9.8.3)式中的 $C(\varepsilon)$ 及 $\bar{H}$，我们来构造下列共轭方程

$$\varepsilon\left(w_{\xi\xi}+w_{\xi\varphi}+\frac{1}{2}w_{\varphi\varphi}\right)+\sin\varphi w_\xi-\left[\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)w\right]_\varphi=0.$$

的解 $w(\xi,\ \varphi)$，使得 $w(0,\ 0)=1$．然后，用 $w(\xi,\ \varphi)$ 乘(9.8.1)式再分部积分，便得

$$\iint_D wLv\,d\xi\,d\varphi=\varepsilon\oint_{\partial D}\left[v_\xi\left(\nu_1+\frac{1}{2}\nu_2\right)+\frac{1}{2}v_\varphi(\nu_1+\nu_2)\right]w\,ds$$
$$=-\iint_D w(\xi,\ \varphi)\,d\xi\,d\varphi, \tag{9.8.6}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\ \nu_2)^T$ 为 ∂D 的外法向．这里我们用到了在边界

∂D 上 $v=0$(参看(9.8.1)式)以及 $L^*w=0$ 这些事实,其中 L^* 是 L 的共轭算子. 将(9.8.3)式代入(9.8.6)式中,得到

$$C(\varepsilon)e^{H/\varepsilon}\oint_{\partial D}\left[u_\xi\left(\nu_1+\frac{1}{2}\nu_2\right)+\frac{1}{2}u_\varphi(\nu_1+\nu_2)\right]w\,ds$$

$$=-\iint_D w\,d\xi\,d\varphi. \tag{9.8.7}$$

我们现在运用"射线法"来构造 $w(\xi, \varphi)$[11], 并且用拉普拉斯方法对积分作渐近计算[75], 从而获得 H 和 $C(\varepsilon)$. 假定 $w(\xi, \varphi)$ 具有如下形式:

$$w(\xi, \varphi)=e^{-\Psi(\xi,\varphi)/\varepsilon}g(\xi, \varphi, \varepsilon), \tag{9.8.8}$$

其中

$$g(\xi, \varphi, \varepsilon)\sim\sum_{j=0}^{\infty}g_j(\xi, \varphi)\varepsilon^j, \tag{9.8.9}$$

且 $\Psi(0, 0)=0$, 对于 $\xi^2+\varphi^2>0$ 有 $\Psi(\xi, \varphi)>0$ 以及 $g_0(0, 0)=1$. 将(9.8.8)式和(9.8.9)式代入(9.8.1)式中, 并使得 ε 的各次幂的系数分别等零,就得到关于 Ψ 和 g_j 的方程.

特别, Ψ 满足非线性方程

$$\Psi_\xi^2+\Psi_\xi\Psi_\varphi+\frac{1}{2}\Psi_\varphi^2-\sin\varphi\,\Psi_\xi+\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)\Psi_\varphi=0, \tag{9.8.10}$$

而 (9.8.9) 展式中的首项 g_0 满足

$$(2\Psi_\xi+\Psi_\varphi-\sin\varphi)\frac{\partial g_0}{\partial\xi}+\left(\Psi_\xi+\Psi_\varphi+\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)\frac{\partial g_0}{\partial\varphi}$$

$$=-\left(\Psi_{\xi\xi}+\Psi_{\xi\varphi}+\frac{1}{2}\Psi_{\varphi\varphi}-\cos\varphi\right)g_0. \tag{9.8.11}$$

方程(9.8.10)和(9.8.11)等价于下列由六个微分方程组成的微分方程组

$$\dot{\xi}=2p+q-\sin\varphi$$

$$\dot{\varphi}=p+q+\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{2}q$$

$$\dot{q} = (p+q)\cos\varphi$$

$$\dot{\Psi} = p^2 + pq + \frac{1}{2}q^2$$

$$\dot{g}_0 = \chi g_0, \tag{9.8.12}$$

其中 $\chi = -\left(\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\xi\varphi} + \frac{1}{2}\Psi_{\varphi\varphi} - \cos\varphi\right)$.

将(9.8.8)式代入(9.8.7)式中，并比较 ε 中相同次幂的项，得到

$$O(\varepsilon)e^{H/\varepsilon}\oint_{\partial D} e^{-\Psi/\varepsilon} g_0\left[v_\xi\left(\nu_1 + \frac{1}{2}\nu_2\right) + \frac{1}{2}v_\varphi(\nu_1 + \nu_2)\right]ds$$

$$\cong -\iint_D e^{-\Psi/\varepsilon} g_0 \, d\xi \, d\varphi. \tag{9.8.13}$$

通过拉普拉斯型积分的渐近计算，可看到(9.8.13)式中，对二重积分的主要贡献来自原点，因此：

$$\iint_D e^{-\Psi/\varepsilon} g_0 \, d\xi \, d\varphi \approx \frac{2\pi\varepsilon}{J}, \tag{9.8.14}$$

其中

$$J = \left|\det\begin{bmatrix} \Psi_{\xi\xi} & \Psi_{\xi\varphi} \\ \Psi_{\xi\varphi} & \Psi_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}\right|_{\xi=0,\ \varphi=0},$$

为了计算 J 的值，运用 $\Psi(\xi, \varphi)$ 关于原点的泰勒展开式，可看到

$$\Psi(\xi, \varphi) = \frac{1}{2}\xi^2 - \xi\varphi + \varphi^2 + O(\xi^3 + \varphi^3); \tag{9.8.15}$$

因而 $J=1$. (9.8.13) 式中的对线积分的主要贡献来自 ∂D 上 Ψ 取极小值的点，例如说在点 $(\xi, \varphi) = \pm(\xi_0, \varphi_0)$ 取极小，而 ξ_0 和 φ_0 的值可由(9.8.12)式的数值积分求得，以下将讨论这一问题. (9.8.13) 式中关于绕 (ξ_0, φ_0) 的边界积分的渐近展开

由下式给出：

$$\oint_{\partial D} e^{-\Psi/\varepsilon} g_0 \left[u_\xi \left(\nu_1 + \frac{1}{2} \nu_2 \right) + \frac{1}{2} u_\varphi (\nu_1 + \nu_2) \right] ds$$

$$\cong 2 \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}\, e^{-\Psi(\xi_0, \varphi_0)/\varepsilon}}{\sqrt{|\Psi''(\xi_0, \varphi_0)|}} g_0(\xi_0, \varphi_0) \cdot \left[u_\xi \left(\nu_1 + \frac{1}{2} \nu_2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} u_\varphi (\nu_1 + \nu_2) \right] \Bigg|_{(\xi_0, \varphi_0)}, \tag{9.8.16}$$

其中，因子 2 是根据被积函数的不变性以及边界对原点的反射的不变性得出的．项 $\Psi''(\xi_0, \varphi_0)$ 是 Ψ 对弧长的二阶导数在边界 ∂D 的一点 (ξ_0, φ_0) 之值．(9.8.6) 式给出了 $u(\xi, \varphi)$ 在点 (ξ_0, φ_0) 处的渐近形式：

$$u^0(\xi, \varphi) \cong b_0^{1/2}(x') \int_0^{y/\sqrt{\varepsilon}} \frac{e^{-s^2 b_0(x')/2}\, ds}{\sqrt{\pi/2}},$$

因而
$$\frac{\partial u^0}{\partial \xi}(\xi_0, \varphi_0) \cong \frac{b_0^{1/2}(0) \partial y/\partial \xi}{\sqrt{\pi\varepsilon/2}} \Bigg|_{(\xi_0, \varphi_0)}.$$

其中点 $x'=0$ 对应点 (ξ_0, φ_0)．同样

$$\frac{\partial u^0}{\partial \varphi}(\xi_0, \varphi_0) \cong \frac{-b_0^{1/2}(0) \partial y/\partial \varphi}{\sqrt{\pi\varepsilon/2}} \Bigg|_{(\xi_0, \varphi_0)}.$$

我们有

$$\mathbf{b}(x', y) \cdot \boldsymbol{\nu} = y \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi_0 \nu_1(\xi_0, \varphi_0) + \left(\frac{1}{2} \xi_0 \cos \varphi_0 \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \nu_2 \right],$$

因而
$$b_0(0) = -\frac{1}{2} \sin \varphi_0 \nu_1(\xi_0, \varphi_0) + \left(\frac{1}{2} \xi_0 \cos \varphi_0 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \nu_2(\xi_0, \varphi_0).$$

这里 $\nu_1(\xi_0, \varphi_0) = \frac{1}{2} \xi_0 - \sin \varphi_0$ 而 $\nu_2(\xi_0, \varphi_0) = \sin \varphi_0$．所以只要知道了 (ξ_0, φ_0)，就可计算出

$$K\equiv u_\xi^0\left(\nu_1+\frac{1}{2}\nu_2\right)+\frac{1}{2}u_\varphi^0(\nu_1+\nu_2)\Big|_{(\xi_0,\varphi_0)}.$$

为了计算 $\Psi''(\xi_0,\varphi_0)$，对 Ψ 关于弧长 s 进行微分得

$$\frac{d^2\Psi}{ds^2}=\frac{d^2\xi}{ds^2}p+\frac{d^2\varphi}{ds^2}q+\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 p_\xi+\frac{d\xi}{ps}\frac{d\varphi}{ds}(p_\xi+q_\varphi)$$
$$+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 q_\varphi.$$

其中，$p=\partial\Psi/\partial\xi$，$q=\partial\Psi/\partial\varphi$.

$$\frac{d\xi}{ds}=\frac{\dot{\xi}}{\sqrt{\dot{\xi}^2+\dot{\varphi}^2}}=\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi+\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)^2}},$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}=-\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi+\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)^2}}\right]$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi+\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)^2}}.\text{[注]}$$

φ 关于 s 的导数有类似的表达式。这样，如果 p, q, p_ξ, p_φ, q_ξ 和 q_φ 在点 (ξ_0,φ_0) 处的值已知，那么，$\Psi''(\xi_0,\varphi_0)$ 的值就可求出。而 Ψ，p，q，p_ξ，p_φ，q_ξ，q_φ 和 g_0 在 (ξ_0,φ_0) 的值以及点 (ξ_0,φ_0) 都可以通过如下数值方法求得。展开式 (9.8.15) 可用来计算 Ψ 的值，并且在关于原点的一个小圆周 C 上还可计算出它的一阶和二阶偏导数的值。这样，方程(9.8.12)的初始条件在圆周 C 上就被给出。取 $g_0(0,0)=1$ 时，便可在圆周 C 上得到 g_0 的一个类似的展开式。对于方程组(9.8.12)的前四个方程关于初始

[注] 原文为 $\frac{d^2\xi}{ds^2}=-\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi+\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)^2}}{\sqrt{\sin^2\varphi+\left(\frac{1}{2}\xi-\sin\varphi\right)^2}}\right]$，疑误——译者注

条件 $\xi=\xi^0$ 进行微分，且令 $\xi_1=\partial\xi/\partial\xi^0, \varphi_1=\partial\varphi/\partial\xi^0, p_1=\partial p/\partial\xi^0$ 以及 $q_1=\partial q/\partial\xi^0$，这样可得到四个新的附加方程

$$\dot{\xi}_1=2p_1+q_1-\varphi_1\cos\varphi$$

$$\dot{\varphi}_1=p_1+q_1+\frac{1}{2}\xi_1-\varphi_1\cos\varphi$$

$$\dot{p}_1=-\frac{1}{2}q_1$$

$$q_1=(p_1+q_1)\cos\varphi-(p+q)\varphi_1\sin\varphi.$$

C 上相应的初始条件为 $\xi_1=1,\ \varphi_1=0,\ p_1=1$ 以及 $q_1=-1$. 因为

$$p_1=\frac{\partial p}{\partial\xi^0}=\left(\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial\xi^0}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^0}\right)$$

$$=\Psi_{\xi\xi}\xi_1+\Psi_{\xi\varphi}\varphi_1 \tag{9.8.17}$$

$$q_1=\Psi_{\xi\varphi}\xi_1+\Psi_{\varphi\varphi}\varphi_1 \tag{9.8.18}$$

$$\dot{p}=\Psi_{\xi\xi}\dot{\xi}+\Psi_{\xi\varphi}\dot{\varphi}, \tag{9.8.19}$$

所以，在每条特征曲线上，得到一个以 Ψ 的二阶偏导数作为未知量的三个线性代数方程组(9.8.17)～(9.8.19). 只要描绘出 Ψ 的阶层曲线，可看到在区域 D 上 Ψ 达到极小的点为 $p(\xi_0, \varphi_0)\cong(2.1,\ 2.4)$. 这样，将(9.8.16)式代入(9.8.14)式中，我们便可从(9.8.13)式得到

$$C(\varepsilon)Ke^{H/\varepsilon}g_0(\xi_0,\ \varphi_0)e^{-\Psi(\xi_0,\varphi_0)/\varepsilon}=\frac{2\pi}{J}=2\pi,$$

因而 $H=\Psi(\xi_0,\ \varphi_0)$ 和 $C(\varepsilon)=2\pi/Kg_0(\xi_0,\ \varphi_0)$，或

$$kE[\tau|\xi(0)=0,\ \varphi(0)=0]=\frac{2\pi\Lambda^{-1/4}}{Kg_0(\xi_0,\ \varphi_0)\sqrt{2\beta}}\times\exp\left[\frac{\Psi(\xi_0,\ \varphi_0)}{2\sqrt{2\beta}}\Lambda\right]^{3/4} \tag{9.8.20}$$

(参看文献[6]).

9.9 锁相环路中的多级跳周和阈现象

众所周知[84]，当信噪比 Λ 很大时，均方频率估计误差 $\overline{e_s^2}$ 依 Λ 线性地变化．当 Λ 减小时（即当噪声增大时），$\overline{e_s^2}$ 将会出现急剧增加(见图 9.9.1)．对于 $\Lambda<\Lambda_0$ 的情况，其中 Λ_0 是 Λ 的临界值，由于误差 $\overline{e_s^2}$ 相当大，以致信号无法从噪声中区分出来．我们称 Λ_0(或者是 ε 相对应的值 ε_0)为阈．超出了阈范围，锁相环路不再是一个有效解调器了．我们将通过描述跳周对于 e_s 的方差所产生的影响来解释这一现象．先从跳周发生过程中和跳周过程后的轨线的性质的描述着手．对于很小的 ε，当环路关于点 $\xi=0,\ \varphi=2\pi n$ 闭锁时，跳周现象很少发生，且仅以单跳跃形式出现，它们被长时间区间彼此隔开．随着 ε 增大，跳跃的现象变得频繁了，有些在 P 的邻近已穿过边界 ∂D 的轨线(见图 9.9.2)，在环路的下一次闭锁发生之前继续穿过下一个域的边界．当 $|\xi(t)|$ 增加时，上述情况发生，则它依次引起 $|\varphi(t)|$ 在

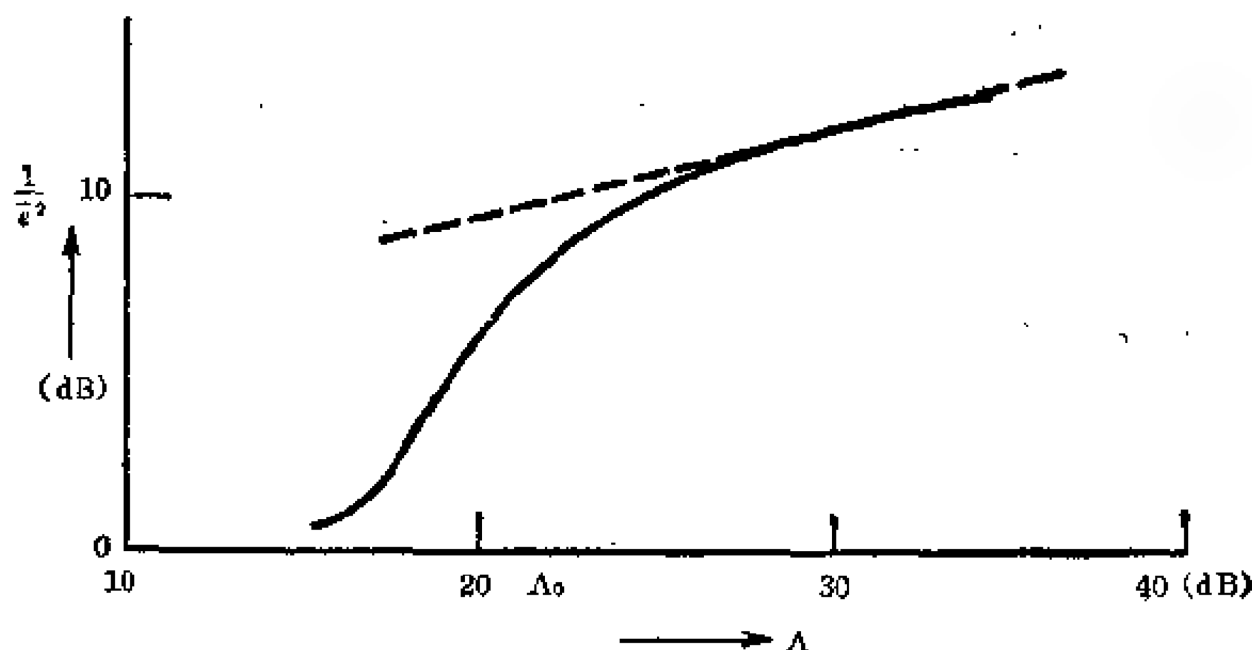


图 9.9.1　调频接收中的临界

短时间周期内以 2π 的倍数增加．下面，我们来计算第二次通过的概率．轨线在 P 邻近穿过域 D 以后，便在确定的路径上作脉动，而此确定的路线在时间长度为 t_0 的周期内几乎平行于 D．在这段时间周期内，点 $(\xi(t),\varphi(t))$ 和 ∂D 之间的平均距离为 ρ．从与边界距离为 ρ 的点通过边界的平均时间 $\bar{\tau}$ 由下式给出：

$$\bar{\tau}=\bar{\tau}_0\operatorname{erfc}\left[\frac{\rho\sqrt{b_0(x')}}{2s}\right],$$

其中 $\bar{\tau}_0$ 是从原点开始的平均首次离出时间，它由(9.8.20)式给出，x' 为我们所考虑的点的切向坐标(法向坐标为 ρ)．所以，在此长为 t_0 的时间内通过 ∂D 的概率由下式给出：

$$p=1-e^{-t/\bar{\tau}}.$$

因而，第二次通过的平均频率 f 为

$$f=\frac{1-e^{-t_0/\bar{\tau}}}{\bar{\tau}_0}=\frac{p}{\bar{\tau}_0}.$$

最后，我们对 $\xi(t)$ 的方差因

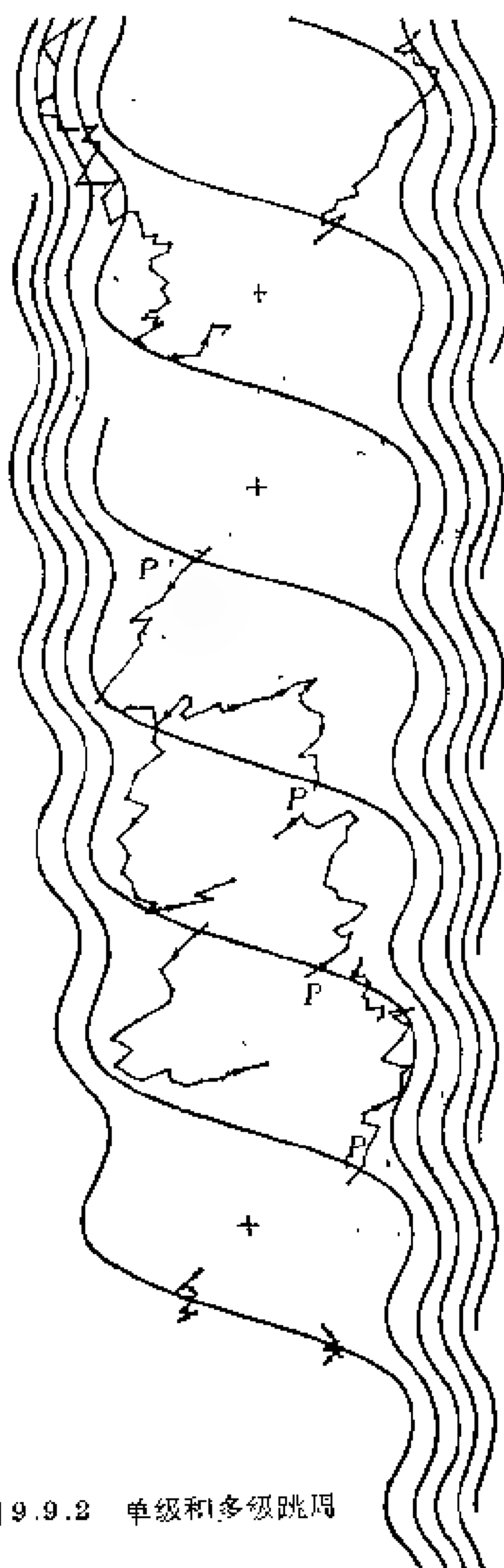


图 9.9.2　单级和多级跳周

跳周的乱动引起的影响作一个粗略的估计．先作一些必要的假定：(i) 诸相邻边界之间的平均距离 S 在 ξ 很大的情况下为常数．(ii) 从一个边界到下一个边界的通过频率为 $e^{-d/\varepsilon}/K$，其中 K 是 (9.8.20) 式中指数前面的因子；d 为 Ψ 从一个边界到下一个边界所产生的增量．在第 n 条带形区域中，$\xi(t)\cong x_0+nS$，其中 x_0 是 D 的半宽度．当 ξ 较大时，由于忽略了(9.7.16)式中项 $\sin\varphi$ 的贡献，因此，确定系统(9.7.15)～(9.7.16) 的运动速度为 $\dot\varphi\cong\dfrac{1}{2}\xi$．由于轨线跑过的距离为 $2\pi n$，从而在第 n 个域中吸收时间近似等于 $2\pi n\Big/\dfrac{1}{2}\xi$．因为 $\xi(t)\cong x_0+nS$，所以，乱动对 $\xi(t)$ 的方差所产生的影响为

$$
\begin{aligned}
\bar\xi^2(t)\cong&2\Big[4\pi x_0+4\pi(x_0+S)p\\
&\quad+4\pi\sum_{n=2}^{\infty}(x_0+nS)npe^{-nd/\varepsilon}/K\Big]+2\varepsilon\\
\cong&\frac{8\pi e^{-Q/\varepsilon}}{K}\{x_0+(x_0+S)p\\
&+e^{-d/\varepsilon}(2-e^{-d/\varepsilon})x_0p/K(1-e^{-d/\varepsilon})^2\\
&+pSe^{-d/\varepsilon}[(1+e^{-d/\varepsilon})/(1-e^{-d/\varepsilon})^2-1]\}+2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

其中 Q 为(9.8.20)式中的指数．式中的项 2 为 $\xi(t)$ 的方差．它是从(9.7.13)式和 (9.7.14) 式关于原点的线性化中获得的，图 9.9.1 给出了对数尺度的 $1/\bar\xi^2(t)$ 与 $1/\varepsilon$ 的关系曲线[6]．

第十章　经典力学和微分方程中的若干论题

10.1　哈密顿运动方程，刘维尔方程，朋加莱定理，洛喜米脱、策墨罗诗论以及斯莫路苏斯基理论

设 $\mathbf{q}=(q_1, \cdots, q_n)^T$ 为质点系统的广义坐标，$\mathbf{p}=(p_1, \cdots, p_n)^T$ 为系统的动量矢．假定该系统的势能是 $V(\mathbf{q})$，于是函数

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q})=\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}}+V(\mathbf{q}) \qquad (10.1.1)$$

就是这一系统的总能量，其中 H 称为系统的哈密顿算符．哈密顿给出了系统的运动方程（牛顿第二运动定律）：

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad 和 \quad \dot{\mathbf{q}}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\mathbf{p}(0)=\mathbf{p}_0,\ \mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0. \qquad (10.1.2)$$

令 $D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ 为相空间［即 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 空间］中质点的密度，由(10.1.2)式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t}&=\frac{\partial D}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}+\frac{\partial D}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial D}{\partial t}\\&=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial D}{\partial \mathbf{q}}-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial D}{\partial \mathbf{p}}+\frac{\partial D}{\partial t}\\&\equiv\frac{\partial D}{\partial t}-\{H, D\},\end{aligned}$$

表达式 $\{H, D\}$ 称为泊松括号．刘维尔定理断言 $dD/dt=0$，因而，相空间中质点密度的刘维尔方程为

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\{H,\ D\}. \tag{10.1.3}$$

为了证明该定理，通过观察，我们注意到在给定点 $(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ 上的速度矢 $(\dot{\mathbf{p}},\ \dot{\mathbf{q}})$ 是相空间．我们可从"流体力学"的角度进行考虑，把 $(\dot{\mathbf{p}},\ \dot{\mathbf{q}})$ 看作是 $(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ t)$ 的函数．由 (10.1.2) 式可计算出 $(\dot{\mathbf{p}},\ \dot{\mathbf{q}})$ 的散度：

$$\operatorname{div}(\dot{\mathbf{p}},\ \dot{\mathbf{q}})=\sum_i\left(\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}+\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial p_i}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_i}\right)$$
$$=0.$$

显然，对于相空间中任一体积元 Ω，有

$$\int_\Omega D\operatorname{div}(\dot{\mathbf{p}},\ \dot{\mathbf{q}})d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}=-\frac{d}{dt}\int_\Omega D\,d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\text{ [注]}.$$

这样刘维尔定理就得到了．

从刘维尔定理可得出一个明显的结论如下：设 $T(t)$ 是由 (10.1.2) 式所定义的变换族，即

$$(\mathbf{p}(t),\ \mathbf{q}(t))=T(t)(\mathbf{p}_0,\ \mathbf{q}_0).$$

显见，$T(t)$ 是"相空间"→"相空间"的一个变换族．由常微分方程解的经典的唯一性定理可知，$T(t)$ 是一一映射．刘维尔定理指出：$T(t)$ 在相空间中是保持体积不变的，还可证明，$T(t)$ 对任意低于 $2n$ 维空间内的曲面面积也保持不变[52]．考虑曲面 Γ：

$$H(\mathbf{p},\ \mathbf{q})=E,$$

即考虑相空间中对应于常能 E 的所有的点．Γ 的任何子集 A 的测度[即 $(2n-1)$ 维的曲面面积]如下给出：

$$\mu(A)=\int_A|\nabla H|^{-1}dS,$$

[注] 原文为 $\int_\Omega \operatorname{div}(\dot{p},\ \dot{q})\,dp\,dq=-\frac{d}{dt}\int_\Omega D\,dp\,dq$，疑误——译者注

其中 $$|\nabla H|^2=\sum\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)^2\right],$$

dS 是曲面 Γ 的面积元。

根据刘维尔定理，可得

$$\mu(T(t)A)=\mu(A).$$

不失一般性，我们假定 $\mu(\Gamma)=1$. 朋加莱 (Poincaré) 循环定理是这样叙述的：如果 $A\subset\Gamma$ 且 $\mu(A)>0$，则对几乎所有的点 $\gamma\in A$，存在一个任意大的 t，使 $T(t)\gamma\in A$. 在证明这一定理之前，我们先把它与气体分子运动论及经典热力学联系起来。热力学第二定律告诉我们："热不能由其本身从较冷的物体传递到较热的物体。"或者说："闭合系统的熵绝不减少"。例如，考察一个密封的盒子，里面没有任何气体，并且假定盒内装有一充满气体的小球，它在某一时刻在盒中的一给定的转角处爆裂。按照热力学第二定律，即气体膨胀是一个不可逆过程，所以盒中这一部位气体的熵低于膨胀气体的熵。朋加莱定理导致了下列策墨罗 (Zermelo) 谬论。策墨罗认为，由于气体的运动是由系统 (10.1.2) 决定的，而该系统在这种情况下是一保守系统，朋加莱定理蕴涵着该系统在有限时间区间内将任意接近它的初始状态。这显然是与热力学第二定律相矛盾的。玻尔兹曼估计了系统返回到它的初始状态邻近位置所需要的时间，这个邻近位置是指系统位置变化在分子间平均距离的 10% 以内，而系统速度的变化在分子速度的 0.2% 以内。他考虑一立方厘米空气，这些空气中含有 10^{18} 个分子，它们以 500 米/秒的速度运动。分子间的平均距离为 $(10^{18})^{-1/3}=10^{-6}$ 厘米数量级。在标准条件下，每个分子每秒大约要受到 4×10^9 次碰撞，从而，碰撞的总次数为

$$C=\frac{4\times10^9\times10^{18}}{2}=2\times10^{27}\text{ 次/秒}.$$

在朋加莱循环结束时，系统位置的变化应不超过 10^{-7} 厘米数量级．而速度的变化应不超过 1 米/秒．系统循环的时间不需要小于所有分子取所有可能的速度所需要的时间，所有可能速度是这样了解的：两个速度是不同的，如果速度的至少一个分量相差至少 1 米/秒．因为系统具有 10^{18} 个分子，第一个分子的速度具有 0 到 $v=500\times10^{9}$ 米/秒之间的所有速度，第二个分子可以具有介于 0 到 $(v^2-v_1^2)^{1/2}$ 之间的所有速度，其中 v_1 是第一个分子的速度．同样，第三个分子可以具有介于 0 到 $(v^2-v_1^2-v_2^2)^{1/2}$ 之间的所有速度，其中 v_2 是第二个分子的速度等等．因此，当 n 为偶数时[注]，所有可能的组合个数为

$$N=(4\pi)^{n-1}\int_0^v v_1^2\,dv_1\int_0^{(v^2-v_1^2)^{1/2}} v_2^2\,dv_2\int_0^{(v^2-v_1^2-v_2^2)^{1/2}} v_3^2\,dv_3 \cdots\int_0^{(v^2-v_1^2-\cdots-v_{n-2}^2)^{1/2}} v_{n-1}^2\,dv_{n-1}$$

$$=\left\{\frac{2(2\pi)^{(3n-4)/2}}{[3(n-1)]!!}\right\}v^{3(n-1)},$$

其中 $v=500\times10^{9}$，$n=10^{10}$，$[3(n-1)]!!=3\cdot5\cdot7\cdots\cdot3(n-1)$．由于 N 个组合中的每一个，在碰撞后可能取到，因此，分子遍历所有可能的速度所需要的总的时间为 N/C．在一特定的距离内，系统位置循环的时间也具有相同的数量级．面临策墨罗这一诗论，玻尔兹曼疾呼："你不用再等了！"[9, 30]

当速度取任意数值时，上述这个计算公式并不反应出特定邻域中距离再现的可能性，这一情况可以在一个单独的朋加莱循环中多次出现，这会使得在初始距离的近似地循环的期望时间远远比玻尔兹曼估计的要短得多．洛喜米脱 (Loschmidt) 也提出过一个类似的诗论．他说：鉴于在时间反向情况下力学定律的对称性，从统计力学观点来看，所有分子过程是可逆的．这

[注] 原文为：当 n 为奇数时．疑误——译者注

显然与热力学第二定律相矛盾。基于布朗运动的概念，斯莫路苏斯基解决了洛喜米脱和策墨罗的诤论（参看习题10.1.4～10.1.12）。

为了证明朋加莱定理，我们考虑集合

$$A_n = A \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} (T^{-k}A)^c \cap T^{-n}A,$$

其中，$T=T(1)$。显然，$T^n=T(n)$。于是可得

$$\chi_{A_n}(\gamma) = \chi_A(\gamma)\chi_A(T^n\gamma) \prod_{k=1}^{n-1} [1-\chi_A(T^k\gamma)];$$

因而 $$\mu(A_n) = \int_\Gamma \chi_A(\gamma)\chi_A(T^n\gamma) \prod_{k=1}^{n-1} [1-\chi_A(T^k\gamma)] d\mu(\gamma).$$

令 $$\nu_n = \int_\Gamma \prod_{k=0}^{n} [1-\chi_A(T^k\gamma)]\, d\mu(\gamma),$$

可以看到 $\{\nu_n\}$ 是非增序列，由归纳法可得

$$\mu(A_{n+1}) = \nu_{n-1} - 2\nu_n + \nu_{n+1},\ (\nu_0=1)\text{[注]}. \quad (10.1.4)$$

在(10.1.4)式的证明过程中，我们把 T 的测度不变性的性质用到下列等式，即

$$\int_\Gamma \prod_{k=1}^{n} [1-\chi_A(T^k\gamma)]\, d\mu(\gamma) = \int_\Gamma \prod_{k=0}^{n-1} [1-\chi_A(T^k\gamma)]\, d\mu(\gamma).$$

因此， $$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_{k+1}) = 1-\nu_1-(\nu_n-\nu_{n+1}).$$

因为序列 $\{\nu_n\}$ 单调有界，故一定收敛，因此有 $\nu_n-\nu_{n+1}\to 0$。所以，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1}) = 1-\nu_1 = \mu(A).$$

令 B 是 A 中所有这样的点 γ 组成的集合，使得仅有有限个点 $T^n\gamma \in A$。则

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

[注] 原文为 $\mu(A_n)=\nu_{n-1}-2\nu_n+\nu_{n+1}$。疑误——译者注

其中 $B_k=\{\gamma\in A|T^n\gamma\notin A$, 对所有 $n\geqslant k\}$. 令 $T_1=T$, 由上述讨论便得 $\mu(B_k)=0$. 所以, $\mu(B)=0$. 因此对于几乎所有 $\gamma\notin A$, 在 A 中存在一无限序列 $\{T^n\gamma\}$. 洛喜米脱和策墨罗悖论由斯莫路苏斯基所解决, 他提出了流体中密度涨落的统计理论; 以下习题就描述了这个理论[9,39].

习题 10.1.1

考虑大体积中包含大量粒子处于平衡状态, 令 v 为其中的体积元, 假定我们每隔固定时间 τ, 系统地观察 v 中所包含的粒子个数. 众所周知[28], 在 v 中所观察到的粒子个数的频率服从泊松分布.

(i) 相距时间为 τ 时, 考虑包含在 v 中的粒子数 n 和 m. 仿照斯莫路苏斯基的理论, 作如下两个假定: (1) 单个粒子的运动不相互影响, 并且彼此独立; (2) v 中所有粒子的位置都具有同样的先验概率. 在长为 τ 的一段时间过程中, v 内任一地方的粒子离出 v 的概率定义为**后效概率** P. 设 $X(t)$ 为在时间 t 时 v 中的粒子个数. 证明 $X(t)$ 是二项变量 $B(n, P)$ 和泊松变量 $S(\nu P)$ 之差, 即 $P(X(t+\tau)=m|X(t)=n)=P(B(n, P)-S(\nu P)=n-m)$ (在 v 中, 于时间 t 观察到 n 个粒子的条件下, 在时间 $t+\tau$ 观察到 m 个粒子的概率). 令 $\Delta=X(t+\tau)-X(t)$. 证明 $E_n\Delta=E(\Delta|X(t)=n)=(\nu-n)P$ 以及 $E_n\Delta^2=nP(1-P)+(\nu-n)^2P^2+\nu P$. 对 n 关于 $S(\nu)$ 求平均值, 便得到 $EE_n\Delta=(\nu-ES(\nu))P=0$ 和

$$EE_n\Delta^2=P^2[E(\nu-S(\nu))^2-ES^2(\nu)]=E(S(\nu)+\nu)P=2\nu P. \tag{10.1.5}$$

(ii) 对 $X(t)$ 进行长时间的观察, 从 $EE_n\Delta^2$ 的简单估计可得到对后效概率 P 的实验测定, 并把 (i) 理解为实验测定 P 的直接法. 证明: 如果在一相距为 τ 的两个时刻所观察到的个数互不相关, 则 $P=1$. 因而, $EE_n\Delta^2=E(S_1(\nu)-S_2(\nu))^2=2\nu$, 其中 $S_1(\nu)$ 和 $S_2(\nu)$ 是相互独立的泊松变量.

习题 10.1.2

在一方块区域中, 每隔 5 秒钟对行人作系统计数. 定义后效概率因子

$P = v\tau/a$, 其中 v 是行人的平均速度，τ 是所选择的时间区间，a 是方块的边长。试应用斯莫路苏斯基理论(参看习题 10.1.1)来估算 v 并与统计数值进行比较[29]。

习题 10.1.3

证明在斯莫路苏斯基理论中，(n, m) 的概率由下式给出：

$$P(S(\nu)=n)P(X(t+\tau)-X(t)=m|X(t)=n)$$

(参看习题 10.1.1)。

习题 10.1.4

运用斯莫路苏斯基理论来确定涨落的平均寿命时间 T_n，即

$$T_n=\sum_{k=1}^{\infty} k\tau P[X(t+j\tau)=n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1,\ \text{且}\ X(t+k\tau)\neq n].$$

确定对一给定的状态的循环的平均时间 Θ_n，即

$$\Theta_n=\sum_{k=1}^{\infty} k\tau P[X(t+j\tau)\neq n, j=1, \cdots, k-1,\ \text{且}\ X(t+k\tau)=n|X(t)=n].$$

导出公式

$$T_n=\frac{\tau}{1-P(X(t+\tau)=n|X(t)=n)}$$

和

$$\Theta_n=T_n\frac{1-P(S(\nu)=n)}{P(S(\nu)=n)}. \tag{10.1.6}$$

证明当 $\nu=1.428$, $P=0.374$ 时，$\Theta_{17}\approx 10^{13}$。将在此情况下观察到的 (n, m) 的频率表 10.1.1 与(10.1.6)式作一比较。

表 10.1.1

n \ m	0	1	2	3	4	5	6
0	210	126	35	7	0	1	0
1	134	281	117	29	1	1	0
2	27	138	108	63	16	3	0
3	10	20	76	38	24	6	0
4	2	2	14	22	13	11	3
5	0	0	2	10	10	1	3

习题 10.1.5

运用习题 10.1.4 的结论来解决洛喜米脱关于可逆性的諍论。

习题 10.1.6

斯莫路苏斯基理论是建立在斯维勃 (Svedberg[86], 1911) 观察基础上的，威仕格伦(Westgren[94], 1918)对于斯莫路苏斯基理论作了实验鉴定。他用一超高倍显微镜对胶体溶液中一个界限分明的体积元内的大量粒子进行了观察，这些观察是在相距为 τ 的定常时刻上进行的．假定 $\tau \gg 1/\beta$，那么，胶质微粒的运动是布朗运动．且扩散系数为

$$D=\frac{kT}{m\beta}=\frac{kT}{6\pi a\eta}.$$

(i) 证明这样一种布朗粒子，它在时间 $t=0$ 位于给定体积元 v (均匀概率分布)内部某处，而在时间 $t=\tau$ 则在 v 外部，其概率分布为

$$\frac{1}{(4\pi D\tau)^{3/2}v}\int_{v^c}\int_v \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}{4D\tau}\,d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\right), \qquad (10.1.7)$$

其中 $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1, z_1)^T$ 在 v 中活动，$\mathbf{r}_2=(x_2, y_2, z_2)^T$ 在 v 的补集 v^c 中活动．(10.1.7)式求得的 P 与(10.1.5)作一比较如下。

(ii) 证明：如果 v 是宽度为 h 的长方体，那么

$$P=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-x^2}dx+\frac{1}{a\sqrt{\pi}}(1-e^{-a^2}) \qquad (10.1.8)$$

其中 $a=h/2\sqrt{D\tau}$．

(iii) 证明：如果 v 是一半径为 r_0 的圆柱体，那么

$$P=e^{-2\sqrt{a}}[I_0(2\sqrt{a})+I_1(2\sqrt{a})], \qquad (10.1.9)$$

其中 $a=r_0/2\sqrt{D\tau}$，I_0 和 I_1 为虚自变量的贝塞耳函数 ($e^{-x}I_{0,1}(x)$ 已被列成了函数数表[93])。

习题 10.1.7

表 10.1.2 是习题 10.1.6(ii) 中长方体内威仕格伦观察的采样值．其中，各个物理参数分别为：$h=6.56\,\mu$，$D=3.96\times10^{-8}$，$\tau=1.39$ 秒，$T=290.0\,\mathrm{K}$，$a=49.5\,\mathrm{pm}$ 和 $\nu=1.428$。

表 10.1.2

2 1 1 1 1 1 0 2 2 1 1 1 2 3 2 3 0 0 0 0 0 0 1

1 0 0 1 0 1 1 1 2 2 3 3 4 5 3 4 2 2 1 2 1 3 2 0

2 2 1 0 2 2 2 1 2 3 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 1 3 3

4 2 2

(i) 由表10.1.2可看出 $S(\nu)$ 的泊松分布很准确地表达了对不同值 n 的观察频数。实验中的观察频数见表 10.1.3。为了与表 10.1.3 作比较，构造一个关于 $S(1.428)$ 的计算表，计算出表 10.1.3 的均值与方差并且与 $\nu=1.428$ 进行比较。

表 10.1.3

n	0	1	2	3	4	5	6	7
频　数	381	568	357	175	67	28	5	2

(ii) 对于各个 τ 值(如 $\tau=\tau_0=1.39$ 秒, $\tau=2\tau_0$ 等)，由表 10.1.2，计算 $EE_n\Delta^2$，并根据(10.1.8)式的计算及 $P=EE_n\Delta^2/\tau$ 的计算绘出曲线 $P=P(\tau)$。

表 10.1.4

τ(秒)	1.50	3.00	4.50	6.00	7.50
$EE_n\Delta^2$	0.836	1.200	1.512	1.718	1.939

(iii) 对于习题 10.1.6(iii) 中圆柱体的情况，表 10.1.4 列出了观察数据，其中 $\tau_0=10.0\,\mu$, $a=63.5\,\mu\mu$, $T=290\,\mathrm{K}$, $D=3.024\times10^{-8}$ 和 $\nu=1.933$。根据(10.1.9)式列出 P 的计算表 P_{calc}，并根据表 10.1.4 列出 P 的观察表 P_{obs}。分别绘出观察曲线和计算曲线 $P(\tau)$。

习题 10.1.8

运用 $D=kT/6\pi a\eta=RT/6Na\eta$，由习题 10.1.6(iii) 确定出阿伏伽德罗数N，其中 R 为气体常数。

习题 10.1.9

运用表达式

$$P(X(t+\tau)=n|X(t)=n)=P(B(n,P)-S(\nu P)=0)$$
$$=e^{-\nu P}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}P^i(1-P)^{n-i}\frac{(\nu P)^i}{i!}\equiv W_n$$

首先证明：当 $\tau\to0$ 且 $P\to0$ 时，有

$$W_n=1-(n+\nu)P(\tau)+O(P^2).$$

其次证明

$$\phi_n(t)\Delta t=P(X(t+\Delta t)\neq n|X(t)=n)\approx W_n^{t/\Delta t}(1-W_n)$$
$$=[1-(n+\nu)P(\Delta t)+O(P^2)]^{t/\Delta t}(n+\nu)P(\Delta t),$$

即一定有 $P(\Delta t)=O(\Delta t)$. 最后证明当 $\tau\to0$ 时 (10.1.7) 式蕴涵了 $P(\tau)=O(\sqrt{\varepsilon})$，并对出现的矛盾解释之.

习题 10.1.10

运用习题 2.1.2 来解决习题 10.1.9 中出现的矛盾，并导出当 $\Delta t\to0$ 时有 $P(\Delta t)=P_0\Delta t+O(\Delta t)^2$. 于是运用(10.1.10)式可得到

$$\phi_n(t)=\exp[-(n+\nu)P_0t](n+\nu)P_0$$

和

$$T_n=\int_0^\infty t\phi_n(t)\,dt=\frac{1}{(n+\nu)P_0},$$

$$\Theta_n=\frac{1}{(n+\nu)P_0}\frac{1-P(S(\nu)=n)}{P(S(\nu)=n)}.$$

(参看(10.1.5)式). 运用这些结果，将 T_n (计算值)和 Θ_n (计算值)与表 10.1.5 中的观察值进行比较.

表 10.1.5

n	0	1	2	3	4
T_n(观察值)	1.67	1.50	1.37	1.25	1.23
Θ_n(观察值)	6.08	3.13	4.11	7.85	18.6

习题 10.1.11

$P(\Delta t)$ 表示最初位于 v 内部且具有麦克斯韦速度分布的粒子在时间 Δt 之前从 v 中离出的概率. 这就是当分子浓度为 $1/v$ 时, 粒子在时间 Δt 内撞击 v 的内表面的粒子的个数. 根据熟知的气体分子运动理论可知, 当粒子的速度在 $|u|$ 与 $|u|+d|u|$ 之间时, 在与固体表面法向成 θ 角的立体角 $d\Omega$ 的单位固体表面上, 每单位时间撞击的分子个数为

$$N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[\frac{-m|u|^2}{2kT}\right]|u|^3\cos\theta\, d\Omega\, d|u|,$$

其中 N 为分子的浓度. 对上式作积分, 可得

$$P_0=\frac{\sigma}{v}\left(\frac{kT}{2\pi n}\right)^{1/2}$$

其中 σ 为 v 的全部表面积. 于是当 ν 相当大且 $n\sim\nu$ 时有

$$T_n=\frac{v}{\sigma(n+\nu)}\left(\frac{2\pi m}{kT}\right)^{1/2}$$

$$\Theta_n=\frac{v}{\sigma(n+\nu)}\left(\frac{2\pi m}{kT}\right)^{1/2}\frac{1-P(S(\nu)=n)}{P(S(\nu)=n)}$$

$$\sim\pi\frac{v}{\sigma}\left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{(n-\nu)^2}{2\nu}\right]$$

(参看习题 10.1.1). 根据斯莫路苏斯基公式, 在半径为 a 的球体中, 氧分子的浓度与平均值偏差为 1%, 计算涨落状态的循环平均时间. 取 $T=300$ K, $\nu=3\times10^{19}\times\frac{4}{3}\pi a^3$. 所得的结果列于表 10.1.6 中.

表 10.1.6

a(厘米)	1	5×10^{-5}	3×10^{-6}	$2\times5\times10^{-5}$	1×10^{-5}
Θ(秒)	$10^{10^{14}}$	10^{63}	10^{5}	1	1

习题 10.1.12

解释策墨罗循环辩论.

运用斯莫路苏斯基理论, 证明对于威仕格伦序列中数 17 的情形, 循环平均时间为 $10^{12}\tau$, 其中 $\nu=1.55$. 当 $\tau=\frac{1}{39}$ 分时, 则 $\Theta\approx500,000$ 年. 运

用表 10.1.6, 证明在温度 $T=300\,\mathrm{K}$ 且 $\nu=3\times10^{10}\,\mathrm{cm}^{-3}$ 的情况下,半径 $a\geqslant5\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$ 的球体中的氧,状态 n 的循环平均时间是 $\Theta>10^{68}$ 秒 $=3.17\times10^{61}$ 年,其中 $(n-\nu)/\nu=0.01(1\%)$. 试按热力学第二定律来解释这个结果[9].

10.2 一阶偏微分方程

刘维尔方程(10.1.2)是用一阶偏微分方程来描述经典力学的一个例子. 它等价于系统(10.1.1),而且是线性的. 经典力学的另一种表示是哈密顿-雅可比给出的一阶非线性偏微分方程. 令

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt, \tag{10.2.1}$$

其中 L 为系统(10.1.1)的**拉格朗日算子**,即

$$L=T(\mathbf{p},\ \mathbf{q})-V(\mathbf{q}),$$

其中 T 是系统的动能,$V(\mathbf{q})$ 是系统的势能.

函数 S 称为**作用量**,由于

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}_i}=p_i,$$

所以,有

$$dS=\mathbf{p}d\mathbf{q}; \tag{10.2.2}$$

从而,把 $\mathbf{q}$ 看作是 S 的函数,有

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\nabla_q S\cdot\dot{\mathbf{q}}=\frac{\partial S}{\partial t}+\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}}.$$

由(10.2.1)式,可得

$$\frac{\partial S}{\partial t}=L,$$

因此

$$\frac{\partial S}{\partial t}=L-\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}}=-H(\mathbf{p},\ \mathbf{q}).$$

由(10.2.2)式可知

$$\mathbf{p}=\nabla_q S,$$

所以，有

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(\nabla_q S,\ \mathbf{q})=0. \tag{10.2.3}$$

非线性方程(10.2.3)称为**哈密顿-雅可比方程**，它等价于方程(10.1.1)[52]. 一阶偏微分方程的一般理论表明，偏微分方程与一常微分方程组等价. 设 $\mathbf{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$，且令 $\mathbf{p}=\nabla u(\mathbf{x})$. 于是一阶偏微分方程即可写成这样的形式:

$$F(\mathbf{x},\ u,\ \mathbf{p})=0, \tag{10.2.4}$$

其中 $u(\mathbf{x})$ 是未知函数. 方程(10.2.4)的**初值问题**是指要找一个解 $u(\mathbf{x})$，使得在给定的 $n-1$ 维曲面 Γ 上，解取一预先给定的值

$$u(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x})\quad \mathbf{x}\in\Gamma. \tag{10.2.5}$$

假定 $\mathbf{t}=(t_1,\ \cdots,\ t_{n-1})^T$ 是 Γ 上独立的参数[即 Γ 是由 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{t})$ 确定]，那么，在 Γ 上一定有

$$\nabla_t\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{t}))=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{t}}\mathbf{p}, \tag{10.2.6}$$

其中 $\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{t}}\right)_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\quad (i=1,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ \cdots,n-1).$

由(10.2.4)式～(10.2.6)式我们在 Γ 上求出 $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{t})$. 初值问题(10.2.4)和(10.2.5)式等价于下列特征常微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\nabla_{\mathbf{p}}F \tag{10.2.7}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds}=-\left(\frac{\partial F}{\partial u}\mathbf{p}+\nabla_{\mathbf{x}}F\right) \tag{10.2.8}$$

$$\frac{du}{ds}=\mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}}F, \tag{10.2.9}$$

其中 s 是一参数(例如表示时间).

方程(10.2.7)和(10.2.8)在 $s=0$ 的初始条件可由 Γ 上的任意一点值来给定. 如果设 $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_0(t)$ 是 Γ 上的任意一点, 那么令

$$\mathbf{x}|_{s=0}=\mathbf{x}_0(\mathbf{t}),\ \mathbf{p}|_{s=0}=\mathbf{p}(\mathbf{t}),\ u|_{s=0}=\varphi(\mathbf{x}_0(\mathbf{t})),$$

其中 $\mathbf{p}(\mathbf{t})$ 可通过在 $\mathbf{x}_0(\mathbf{t})$ 求解方程 (10.2.4)～(10.2.6) 得到. 因此, $u(\mathbf{x})$ 可沿着方程 (10.2.7)～(10.2.9) 的每条特征曲线来确定[19].

习题 10.2.1

写出刘维尔方程和哈密顿-雅可比方程的特征方程. 在物理问题中, 上述两种情况的初始流形 Γ 是什么?

习题 10.2.2

设一个质点在力的势场中移动. 写出描述该质点运动的牛顿运动方程,刘维尔方程和哈密顿-雅可比方程. 在方程中引入动摩擦(摩擦$=-\beta\mathbf{v}$, 其中 $\mathbf{v}$ 是速度, β 是摩擦系数). 在方程中再引入一与时间有关的外力. 假定质点具有一个静电荷, 并且假定除了势场以外还有一个磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{q},t)$, 其中 $\mathbf{q}$ 是质点的坐标(磁力$=\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, 其中 γ 是常数). 再假定刘维尔方程中质点的初始密度是已知的[例如 $D(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ 0)=\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0,\ \mathbf{q}-\mathbf{q}_0)$].

习题 10.2.3

写出有阻尼谐振

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+w^2x=0$$

的刘维尔方程和哈密顿-雅可比方程, 并解之.

10.3 椭圆型和抛物型偏微分方程

设 $\mathbf{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$ 是有界区域 $\Omega\subset R^n$ 且具有光滑边界

$\partial\Omega$ 内的变量. 用下标来表示偏导数, 即

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}=u_i(\mathbf{x}),$$

并且我们将采用二重足标求和的惯例. 于是,

$$a^{ij}u_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}.$$

假定 $a^{ij}(\mathbf{x})$, $b^i(\mathbf{x})$ 和 $c(\mathbf{x})$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, 均是在区域 $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ 内的光滑函数. 如果对每个向量 $\xi\in R^n$ 以及任一 $\mathbf{x}\in\Omega$, 有

$$E(\mathbf{x}, \xi)\equiv a^{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j\neq 0,$$

那么, 称算子

$$Lu=a^{ij}(\mathbf{x})u_{ij}(\mathbf{x})+b^i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})+c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$$

为**椭圆型的**. 如果存在一个正常数 δ, 使得对所有的 $\mathbf{x}\in\Omega$ 以及 $\xi\in R^n$, 有 $E(\mathbf{x}, \xi)\geqslant\delta|\xi|^2$, 那么, 称算子 L 是**一致椭圆型的**. 众所周知, 如果 L 是一致椭圆型的, 且在 Ω 内有 $c(\mathbf{x})\leqslant 0$, 那么方程

$$Lu(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{10.3.1}$$

有唯一解, 且满足边界条件: 对于 $\mathbf{x}\in\partial\Omega$,

$$\alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x})+\beta(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\nu}=\varphi(\mathbf{x}), \tag{10.3.2}$$

其中 $\alpha(\mathbf{x})$, $\beta(\mathbf{x})$ 和 $\varphi(\mathbf{x})$ 均是给定的光滑函数, 且 $\alpha^2+\beta^2>0$. 当 $f(\mathbf{x})=0$ 时, 对于边值问题 (10.3.1) 和 (10.3.2) 存在一个**格林函数**, 也就是说有这样一个对于 $\mathbf{x}\in\Omega$, $\mathbf{y}\in\partial\Omega$ 有定义的函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 使得边值问题的解由下式给出:

$$u(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,dS_{\mathbf{y}}.$$

例如, 如果在圆域 $\Omega=\{x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 中, $L=\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, 那么

$$u(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho^2)\varphi(\theta)}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}\,d\theta,$$

其中 $x=\rho\cos\phi$ 和 $y=\rho\sin\phi$, 即

$$G(x,\ y,\ \xi,\ \eta)=\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}.$$

其中 $\xi=R\cos\theta$ 和 $\eta=R\sin\theta$, $(\xi,\ \eta)\in\partial\Omega$.

习题 10.3.1

求下列问题的格林函数: 在 R^n 中

$$\Delta u=0,\quad 在\ |\mathbf{x}|<R\ 中,$$
$$u=\varphi,\quad 在\ |\mathbf{x}|=R\ 上.$$

习题 10.3.2

求问题

$$\Delta u=0,\quad 在\ x_n>0\ 中,$$
$$u=\varphi,\quad 在\ x_n=0\ 上$$

的格林函数, 其中 $\mathbf{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$.

习题 10.3.3

试用分离变量法, 即

$$u(\rho,\ \phi)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(\rho)F_n(\phi)$$

来解问题

$$\Delta u=0,\quad 在\ x^2+y^2<R^2\ 中,$$
$$u=\phi,\quad 在\ x^2+y^2=R^2\ 上.$$

习题 10.3.4

求问题

$$\Delta u=0,\quad 在\ r^2<x^2+y^2<R^2\ 中,$$
$$u=\varphi_1,\quad 在\ x^2+y^2=r^2\ 上,$$
$$u=\varphi_2,\quad 在\ x^2+y^2=R^2\ 上$$

的格林函数。

习题　10.3.5

求问题
$$\Delta u+cu=0,\quad 在\ x^2+y^2<R^2\ 中,$$
$$u=\varphi,\quad 在\ x^2+y^2=R^2\ 上$$
的格林函数，其中 $c=$常数.

设 Lu 由方程(10.3.1)定义. 如果对于 Ω 中每一对光滑函数 u 和 v，而且在边界 $\partial\Omega$ 上满足 $u=v=0$，且有

$$\int_\Omega u\,Lv\,d\mathbf{x}=\int_\Omega v\,L^*u\,d\mathbf{x},\tag{10.3.3}$$

其中 L^* 为二阶线性算子，这时称 L^* 为 L 的(形式)**共轭算子**. 运用分部积分法(即利用散度定理)，可看到

$$L^*u=[a^{ij}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})]_{ij}-[b^i(\mathbf{x})u(\mathbf{x})]_i+c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}).$$

事实上，

$$\begin{aligned}uLv-vL^*u&=(a^{ij}uv_i)_j-(a^{ij}u_iv)_j-(a^{ij}_juv)_i+(b^iuv)_i\\&=\operatorname{div}\mathbf{P},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{P}=(P^1,\cdots,P^n)^T$ 和

$$P^j=a^{ij}uv_i-a^{ij}u_iv-a^{ij}_iuv+b^juv,$$

这里，我们用到 $a^{ij}=a^{ji}$ 这个事实. 于是有

$$\begin{aligned}\int_\Omega[uLv-vL^*u]\,d\mathbf{x}=\int_{\partial\Omega}&[a^{ij}\nu^j(uv_i-u_iv)\\&+(b^i-a^{ij}_j)\nu^iuv]\,dS_{\mathbf{x}}=0,\end{aligned}\tag{10.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}=(\nu^1,\cdots,\nu^n)^T$ 表示 $\partial\Omega$ 的外法向. 由于假定在边界 $\partial\Omega$ 上 $u=v=0$，所以可推出 (10.3.4) 式中的最后一步等式.

如果在 $\partial\Omega$ 上 $v=0$ 而 $u\neq0$，那么有

$$\int_{\Omega}[uLv-vL^*u]\,d\mathbf{x}=\int_{\partial\Omega}ua^{ij}\nu^j v_i\,dS_x=\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\,dS_x,\tag{10.3.5}$$

其中方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}=a^{ij}\nu^j v_i$$

称为 v 的余法向导数. 当 $a^{ij}=\delta_{ij}$(克罗内克 δ)时，便有

$$\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial v}{\partial\nu}.$$

习题 **10.3.6**

当 $L=\Delta$ 时，运用(10.3.4)式得到格林恒等式

$$\int_{\Omega}[u\Delta v-v\Delta u]\,d\mathbf{x}=\int_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]dS_x.$$

如果算子 L 满足 $L=L^*$，称 L 为**自共轭算子**. 如果对于满足边界条件 $Bu=Bv=0$ 的所有函数 u 和 v，(10.3.3) 式均成立，那么称边值问题

$$Lu=f,\quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$Bu=\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial\nu}=0,\quad 在\ \partial\Omega\ 上$$

是自共轭的.

如果存在一非零函数 $\varphi_\lambda(\mathbf{x})$，使得

$$L\varphi_\lambda(\mathbf{x})+\lambda\varphi_\lambda(\mathbf{x})=0,\quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$\varphi_\lambda(\mathbf{x})=0,\quad 在\ \partial\Omega\ 上,$$

则称 λ 为算子 L 的**特征值**. 函数 $\varphi_\lambda(\mathbf{x})$ 称为对应于特征值 λ 的**特征函数**.

如果 L 是自共轭椭圆型算子，那么一定存在一无限实特征值序列 $\{\lambda_n\}$，且当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\infty$. 如果 $c(\mathbf{x})\geqslant 0$，则所有特

征值是非负的，在这种情况下

$$Lu=(a^{ij}(\mathbf{x})u_i)_j+c(\mathbf{x})u.$$

它的各个特征函数 $\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})$ 是正交的，即当 $n\neq m$ 时有

$$\int_\Omega \varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})\varphi_{\lambda_m}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0.$$

对 Ω 中任一平方可积函数 $f(\mathbf{x})$，当 $m\to\infty$ 时，就有

$$\int_\Omega \left|f(\mathbf{x})-\sum_{n=1}^{m} c_n\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})^2\right|d\mathbf{x}\to 0,$$

其中

$$c_n=\frac{\int_\Omega f(\mathbf{x})\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}}{\int_\Omega |\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}.$$

在此情况下，边值问题

$$\begin{aligned} &Lu=f(\mathbf{x}), \quad 在\ \Omega\ 中. \\ &u=0, \quad 在\ \partial\Omega\ 上 \end{aligned} \tag{10.3.6}$$

的解由下式给出：

$$u(\mathbf{x})=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x}),$$

其中 $a_n=c_n/\lambda_n$，问题(10.3.6)的格林函数由下式给出：

$$G(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{y})}{\lambda_n\int_\Omega |\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}}.$$

边值问题

$$\begin{aligned} &Lu=0, \quad 在\ \Omega\ 中, \\ &u=g(\mathbf{x}), \quad 在\ \partial\Omega\ 上, \end{aligned}$$

用

$$u(\mathbf{x})=U(\mathbf{x})+G(\mathbf{x})$$

替代后，可以简化为问题 (10.3.6)，其中 $G(\mathbf{x})$ 是 Ω 中任一光滑函数，使得在边界 $\partial\Omega$ 上满足 $G(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})$，而 U 满足边值问题 (10.3.6)，其中函数 $f(\mathbf{x})=-LG(\mathbf{x})$[13]. 如果 L 是椭圆型算子，且 $E(\mathbf{x},\ \xi,\ t)\geqslant 0$，那么方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-Lu=f(\mathbf{x},\ t) \tag{10.3.7}$$

称为**抛物型方程**. 其中 L 的系数可依赖于 t. 如果对所有$(\mathbf{x}, t)$和$\xi\in R^n$, 有 $E(\mathbf{x},\ \xi,\ t)\geqslant\delta|\xi|^2$, 那么就称方程(10.3.7)为**一致抛物型的**. 如果在区域 $R^n\times(0,\ T)$ 中,方程(10.3.7)是一致抛物型的,那么,具有初始条件

$$\mu(\mathbf{x},\ 0)=g(\mathbf{x}) \tag{10.3.8}$$

的方程(10.3.7)有唯一解.

问题(10.3.7)和(10.3.8)称为**柯西问题**. 它有一个**基本解**[即函数 $\Gamma(\mathbf{x},\ s,\ \mathbf{y},\ t)(s<t)$],使得柯西问题的解如下给出:

$$u(\mathbf{y},\ t)=\int_{R^n}\Gamma(\mathbf{x},\ 0,\ \mathbf{y},\ t)g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$
$$-\int_0^t\int_{R^n}\Gamma(\mathbf{x},s,\mathbf{y},t)f(\mathbf{x},s)\,d\mathbf{x}\,ds.$$

抛物型方程
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}D\Delta u$$

称为**扩散方程**或**热传导方程**. $\frac{1}{2}D$ 称为**扩散系数**. 函数

$$\Gamma(\mathbf{x},\ s,\ \mathbf{y},\ t)=[2\pi D(t-s)]^{-n/2}e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2/2D(t-s)}$$

为热传导方程的基本解. 基本解满足方程

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=L_{\mathbf{y}}\Gamma,\quad \mathbf{y}\neq\mathbf{x},\ t>s$$

及初始条件 $\Gamma(\mathbf{x},s,\mathbf{y},t)\to\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, 当 $t\downarrow s$ 时.

习题 10.3.7

求方程
$$a_{ij}u_{ij}+b_iu_i+cu=\frac{\partial u}{\partial t}$$
的基本解,其中 a_{ij}、b_i 和 c 均为常数

习题 10.3.8

求方程
$$a_{ij}u_{ij}+b_{ij}(x_iu)_j=\frac{\partial u}{\partial t}$$
的基本解，其中 a_{ij} 和 b_{ij} 均是常数．在什么条件下，当 $t\to\infty$ 时，$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\to\Gamma(\mathbf{y})$，其中 $\Gamma(\mathbf{y})$ 是一个极限函数．这里要用到
$$\Gamma(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}, t)=\Gamma(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}, t-s).$$
首先考虑 $a_{ij}=\delta_{ij}$ 的情形．

习题 10.3.9

设 $\Gamma(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}, t)$ 是问题
$$[a_{ij}(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)]_{ij}+[b_i(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)]_i=\frac{\partial u}{\partial t}$$
的基本解．证明
$$\int_{R^n}\Gamma(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}, t)d\mathbf{y}=1.$$
（假定当 $|\mathbf{y}|\to\infty$ 时，$\Gamma\to0$）．

设 Ω 是 R^n 中一有界区域，且具有光滑边界 $\partial\Omega$．对于每一个 $T>0$，初始边值问题
$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-Lu=f(\mathbf{x}, t),\ \text{在 }\Omega\times(0, T)\text{中},\\&u(\mathbf{x}, t)=g(\mathbf{x}, t),\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\&u(\mathbf{x}, 0)=h(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega\end{aligned}\tag{10.3.9}$$
有唯一解．用替换法可将问题(10.3.9)转化为 $g\equiv0$ 的情况．此时，它就有一个基本解 $\Gamma(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}, t)$，使得
$$u(\mathbf{y}, t)=\int_\Omega\Gamma(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}, t)h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}-\int_0^t\int_\Omega\Gamma(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}, t)f(\mathbf{x}, s)\,d\mathbf{x}\,ds.$$

例如，考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<1,\ t>0, \tag{10.3.10}$$

$$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0, \quad t>0, \tag{10.3.11}$$

$$u(x,\ 0)=h(x), \quad 0<x<1. \tag{10.3.12}$$

它的解可通过分离变量法求得. 令

$$u(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)T_n(t),$$

其中，对每个 n，函数 $R_n(x)T_n(t)$ 是方程 (10.3.10) 和 (10.3.11)的解，即

$$\frac{R_n''(x)}{R_n(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda_n^2.$$

因为 $R_n(0)=0$，所以我们一定有 $R_n(x)=a_n\sin\lambda_n x$. 由于 $R_0(1)=0$，所以必有 $\lambda_n=n\pi$，于是

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t}.$$

令 $t=0$，由(10.3.12)式，必有

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x,$$

所以
$$a_n=2\int_0^1 h(x)\sin n\pi x\,dx.$$

一般来说，如果 L 不依赖于 t，且在 Ω 内是自共轭一致椭圆型算子，则

$$\Gamma(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{y})\,e^{-\lambda_n t}}{\int_\Omega |\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}},$$

其中，λ_n 和 $\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})$ 分别是 L 的特征值和特征函数。

习题 10.3.10

设算子 L 与 t 无关，且假定

$$L_1 = G(\mathbf{x})L$$

在 Ω 中是自共轭一致椭圆型算子．证明方程(10.3.9)的基本解为

$$\Gamma(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(\mathbf{x})\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{y})e^{-\lambda_n t},$$

其中 $\varphi_{\lambda_n}(\mathbf{x})$ 是适当规范化的．

习题 10.3.11

证明：如果 Γ 是习题 10.3.10 中的函数，则函数

$$v(\mathbf{y}) = \int_{\Omega}\int_0^{\infty} \Gamma(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ t)\,dt\,d\mathbf{x}$$

是下列边值问题的解

$$Lv(\mathbf{y}) = 1, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中},$$
$$v(\mathbf{y}) = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.$$

习题 10.3.12

证明：如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\phi(x)}dx < \infty,$$

则方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\frac{1}{2}\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial(u\partial\phi/\partial x)}{\partial x}$$

的基本解 Γ 满足：当 $t\to\infty$ 时

$$\Gamma(x,\ y,\ t) \to \frac{e^{-\phi(y)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\phi(x)}dx}.$$

（参看文献[12]和[66]）．

如果 L 的系数是 t 的有界函数，$-\infty<t<\infty$，那么，问题(10.3.9)对于有界函数 $f(\mathbf{x},\ t)$ 和 $g(\mathbf{x},\ t)$ 有唯一解．特别，如

果 L 与 t 无关，f 和 g 也与 t 无关，那么，所得到的解与 t 无关[38,78,79]。

习题 10.3.13

解后向边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xb(t)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty<t<\infty,$$

$$u(x,\ t)\to c_1 \quad 当\ x\to\infty\ 时,$$

$$u(x,\ t)\to c_2 \quad 当\ x\to-\infty\ 时,$$

其中 $b(t)$ 是有界光滑函数. 利用形式解

$$u(x,\ t)=K_1\int_0^{xa(t)} e^{-s^2/2}\,ds+K_2$$

进行试验，其中 K_1 和 K_2 是常数，$a(t)$ 为待定函数。

附录　电路原理

构成电路的基本元件是电阻器、线圈(感应的和自感应的)、电容器和电源(直流电和交流电)。我们把电路中 a, b 两点之间的电阻、电流和电压分别记为 R_{ab}, I_{ab} 和 V_{ab}, 它们可以是时间 t 的函数。由下面欧姆定律阐明

$$V_{ab}(t)=R_{ab}(t)I_{ab}(t). \tag{A.1}$$

如果在 a, b 两点之间串接一自感应系数为 L_{ab} 的线圈，那么

$$V_{ab}(t)=L_{ab}\frac{d}{dt}I_{ab}(t). \tag{A.2}$$

如果在 a, b 两点之间串接一电容为 C_{ab} 的电容器，那么

$$I_{ab}(t)=C_{ab}\frac{d}{dt}V_{ab}(t). \tag{A.3}$$

量 $Q_{ab}(t)=C_{ab}V_{ab}(t)$ 表示电容器上的电荷. 由下面的感应定律可知，两个感应元件可通过感应电动势相互作用. 设两个线圈的自感应系数分别为 L_1 和 L_2, 它们的感应系数均为 M, 那么,

$$\begin{aligned}V_1(t)&=L_1\dot{I}_1(t)+M\dot{I}_2(t)\\ V_2(t)&=L_2\dot{I}_2(t)+M\dot{I}_1(t),\end{aligned} \tag{A.4}$$

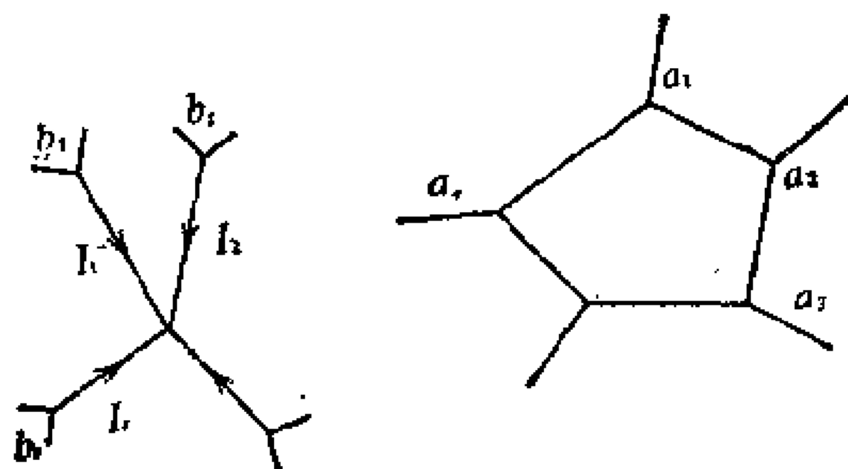


图 A.1　基尔霍夫定律

其中，I_k 和 $V_k(k=1, 2)$ 表示线圈中的电流和线圈上的电压．基尔霍夫给出了以下两个定律（见图 A.1）：

(i) 在一电路中流进任一节点的所有电流的代数和等于零。

(ii) 在一电路中沿任一闭合回路的电压降的代数和等于零。

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} V_{a_j, a_{j+1}} = 0 \quad (a_{n+1} = d_1).$$

如果用拉普拉斯变换语言，记

$$\frac{1}{s} f = \int_0^t f(t) dt.$$

那么，方程(A.1)—(A.3)均能表示为下列形式：

$$V(t) = Z(s) I(t).$$

在 (A.1) 式中 $Z(s) = R$；在 (A.2) 式中 $Z(s) = L_s$；在(A.3)式中 $Z(s) = 1/C_s$，函数 $Z(s)$ 称为 a, b 两点之间的阻抗算子．

函数 $G(s) = 1/Z(s)$ 称为导纳算子．因此对于 (A.1) 式—(A.3) 式有关系式

$$I(t) = G(s) V(t).$$

由 (A.4) 式可得

$$V_1(t) = L_1 s I_1(t) + M s I_2(t)$$

$$V_2(t) = L_2 s I_2(t) + M s I_1(t).$$

在电路示意图中，常常运用图 A.2 符号．振荡器由图 A.3 元件构成。

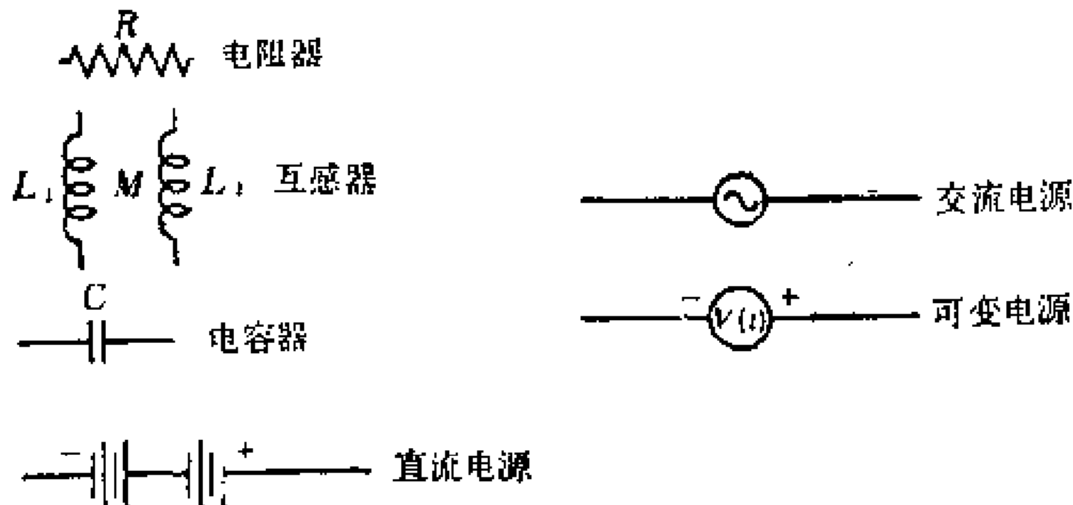


图 A.2　电路元件

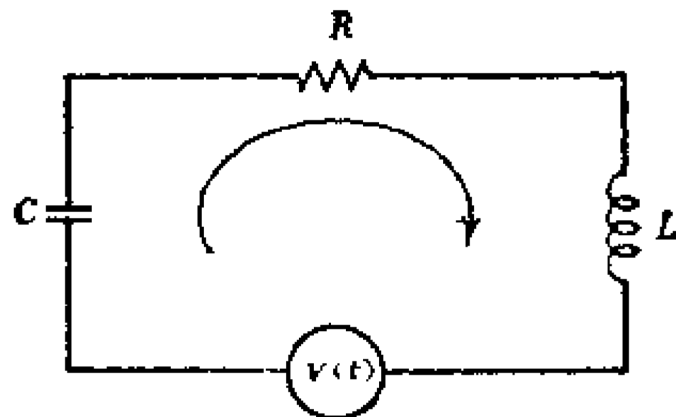


图 A.3 振荡器

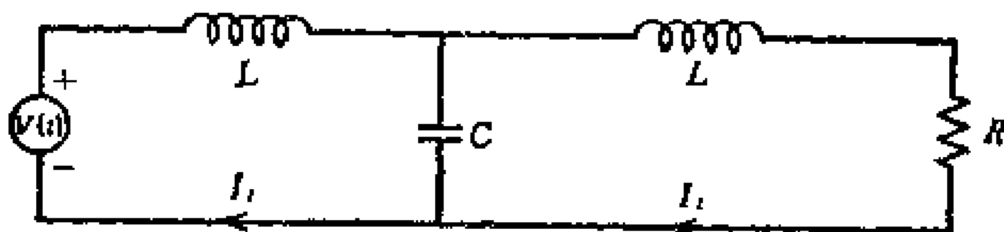


图 A.4 低通滤波器

由基尔霍夫定律，容易得到

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)I(t)=V(t). \tag{A.5}$$

因而
$$G(s)=\frac{Cs}{LCs^2+RCs+1}.$$

如果 $V(t)=0$ 且 $R=0$，那么，由 (A.5) 式可得

$$I(t)=k\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}+\delta\right),$$

其中 δ 依赖于初始条件．这样，$\omega=1/\sqrt{LC}$ 为电路的振荡频率．

滤波器是由图 A.4 元件构成的一个电路．

根据基尔霍夫定律，容易得到下列方程组

$$LsI_1+LsI_2+RI_2-V(t)=0$$

$$LsI_2+RI_2+\frac{1}{Cs}(I_2-I_1)=0.$$

给定 $V(t)=be^{i\omega t}$，那么，方程组的解就为

$$I_1=a_1e^{i\omega t},\quad I_2=a_2e^{i\omega t},$$

其中
$$a_2=\frac{b}{(R-LRC\omega^2)+i\omega(2LC-CL^2\omega^2)}$$

电阻器 R 上的电压降为

$$V=I_2R,$$

因此

$$|V|=|a_2|R\equiv a=\frac{bR/C}{\sqrt{[(R/C)-LR\omega^2]^2+\omega^2[(2L/C)-L^2\omega^2]^2}}.$$

如果 ω 很小，有

$$\frac{a}{b}\approx 1,$$

从而小频率不能影响电阻器上电压振荡的振幅(即低频率通过滤波器时仅有微小的变化)．对于高频率 ω，有

$$\frac{a}{b}\approx\frac{R}{CL^2\omega^2}\ll 1,$$

也就是说，高频实际上不能传过滤波器．

索　　引

A

B

Butterworth spectra	布特屋史谱

C

Central limit theorem	中心极限定理
Chapman-Kolmogorov equation	切普曼-柯尔莫哥洛夫方程
Characteristic equations	特征方程
Characteristic function	特征函数
Characteristics	特征(曲线)
Chebyshev's inequality	切比晓夫不等式
Chemical reaction	化学反应
Conductivity	电导率
Conductivity tensor	电导张量
Conditional distribution	条件分布
Conditional expectation	条件期望
Conditional probability	条件概率
Correlation coefficient	相关系数
Covariance	协方差
of stochastic integrals	随机积分的协方差
Critical point	临界点
Cycle slipping	跳周

D

Density function	密度函数
conditional	条件密度函数
Deterministic model	确定型模型
Deterministic system	确定型系统
Diffusion coefficient	扩散系数
Diffusion equation	扩散方程
Diffusion process	扩散过程
Diffusion tensor	扩散张量
Dirichlet problem	狄里克莱问题

Distribution: conditional	条件分布
marginal	边缘分布
Distribution function	分布函数
Drift coefficient	偏移系数
Dynkin's equation	邓肯方程

E

Eigenvalues	特征值
Einstein	爱因斯坦
Electrical circuit	电路
Estimator	估计量
Events	事件
elementary	基本事件
independent	独立事件
random	随机事件
Exit time	离出时间
Expectation	数学期望
of stochastic integral	随机积分的数学期望

F

Feynman-Kac formula	费恩曼-卡西公式
Filter, Kalman-Bucy	卡尔曼-布西滤波器
for AM	调幅的卡尔曼-布西滤波器
Filter, low-pass	低通滤波器
Filtering theory	滤波理论
linear	线性滤波理论
nonlinear	非线性滤波理论
First passage time	首次通过时间
Fitness	合理性(适应性)
Fokker-Planck equation	福克尔-普朗克方程

Forward equation, *see* Fokker-Planck equation	前向方程，见福克尔-普朗克方程
Frequency deviation	频偏
Frequency modulation	调频

G

Gaussian distribution	高斯分布
Gaussian process	高斯过程
Gaussian variable	高斯变量
Generalized function	广义函数
Genetics	遗传学
Green's function	格林函数

H

Haar system	哈尔系统
Hamilton equations	哈密顿方程
Hamilton-Jacobi equation	哈密顿-雅可比方程
Heterodyning	外差作用

I

Independent events	独立事件
Independent variables	独立变量
Inner layer	内层
Isothermal atmospheres, law of,	等温大气，等温大气定律
Itô's formula	伊藤公式
Itô's integral	伊藤积分

K

Killing process	毁灭过程

Kolmogorov's backward and forward equations	柯尔莫哥洛夫后向与前向方程
Kolmogorov's equation	柯尔莫哥洛夫方程
Kolmogorov's formula	柯尔莫哥洛夫公式
Kolmogorov's inequality	柯尔莫哥洛夫不等式
Kramers, H. A., *See also* Smoluchowski-Kramers	克拉美，也见斯莫路苏斯基-克拉美
Kushner's equation	库西内尔方程

L

Langevin's equation	朗之万方程
Liouville's equation	刘维尔方程
Localization principle	局部化原理
Loschmidt's paradox	洛喜米脱悖论
Lyapunov function	李雅普诺夫函数

M

Markov chain	马尔可夫链
Markov process	马尔可夫过程
Markov property	马尔可夫性质
strong	强马尔可夫性质
Markov time	马尔可夫时间
Martingale	鞅
Martingale inequality	鞅不等式
Maxwellian distribution	麦克斯韦分布
Modulation	调制
amplitude	调幅
frequency	调频
phase	调相
Modulation index	调制指数
Moments	矩

N

Nernst-Einstein formula	纳恩斯特-爱因斯坦公式
Noise: white	白噪声
colored	有色噪声
Nonanticipating function	非可料函数
Normal distribution	正态分布
Normal variable	正态变量

O

Orsntein-Uhlenbeck process	奥伦斯坦-乌伦贝克过程
Outer expansion	外展开式

P

Phase-locked loop	锁相环路
Poincaré's theorem	朋加莱定理
Potential	势
Potential barrier	势垒
Power spectrum	功率谱
Predator-prey model	捕食者-被捕食者模型
Probability: absolute, formula	全概率公式
conditional	条件概率
Probability density function	概率密度函数
of Brownian motion	布朗运动的概率密度函数
Probability distribution function	概率分布函数
Probability measure	概率测度
Processor equation	处理方程

R

Random events	随机事件

Random process 随机过程
Random signal 随机信号
Random variable 随机变量
  binomial 二项随机变量
  Gaussian 高斯随机变量
  Poisson 泊松随机变量
  uniform 均匀随机变量
Random walk 随机游动
Reduced equation 简化方程

S

Sample space 样本空间
Separation of variables 分离变量
Signal 信号
Signal-to-noise ratio (SNR) 信号-噪声比(信噪比)
Singular perturbutions 奇异摄动
Smoluchowski M. 斯莫路苏斯基
Smoluchowski equation 斯莫路苏斯基方程
Smoluchowski-Kramers approximation 斯莫路苏斯基-克拉美逼近
Smoluchowski-Kramers equation 斯莫路苏斯基-克拉美方程
Smoluchowski theory 斯莫路苏斯基理论
Spectral density function 谱密度函数
Stability of SDE 随机微分方程的稳定性
Steric factor 位阻因素
Stochastic differential 随机微分
Stochastic differential equations linear 线性随机微分方程
Stochastic integral 随机积分
Stochastic stability 随机稳定性
Stratonovich integral 斯特拉脱诺维奇积分

Svedberg, Th.	斯维勃理论

T

Transition probability	转移概率
of Brownian motion	布朗运动的转移概率
Transition probability density	转移概率密度
Transition state	转移状态
Transport equation	迁移方程

V

Variables, separation of	变量,分离变量
Variance	方差
of stochastic integral	随机积分的方差
Variance equation	方差方程

W

Westgren, A.	威仕格伦
Wong-Zakai correction	王-萨凯修正
Wright-Fisher model	Wright-Fisher 模型

Z

Zermelo's paradox	策墨罗悖论

参考文献

[1] Anderson, R. F. and Orey, S "Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary," *Nagoya Math. J.*, **60** (1976), 189~216.

[2] Aronson, D. G. "Linear parabolic differential equations containing a small parameter," *J. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1956), 6, 1003~1014.

[3] Aronson, D. G. "The fundamental solution of a linear parabolic equation containing a small parameter," *Ill. J. Math.* **3** (1959), 580~619.

[4] Benson, S. W. *The Foundations of Chemical Kinetics*. McGraw-Hill, New York, 1960.

[5] Benssousan, A., Lions, J. L., and Papanicolaou, G. *Asymptotic Methods for Media with Periodic Structure*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[6] Bobrovsky, B, Z. and Schuss, Z. "Multiple cycle slips in a PLL," to appear.

[7] Bobrovsky, B. Z. and Schuss, Z. "Singular perturbation method for the computation of the mean fir first passage time in a non-linear filter." to appear.

[8] Bobrovsky, B. Z., Emanuel, A., and Schuss, Z. "Performance of a quasi-optimum FM demodulator," to appear.

[9] Chandrasekhar, S. "Stochastic problems in physics and astronomy," *Noise and Stochastic Processes* (N. Wax, Ed.). Dover, New York, 1954.

[10] Coddington, E. and Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.

[11] Cohen, J. K. and Lewis, R. M. "A ray method for the asymptotic solution of the diffusion equation," *J. Inst. Math. Appl.*, **3** (1967). 266 290.

[12] Courant, R. and Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 2. Interscience, New York, 1962.

[13] Cramér, H. "Über eine Eigenschaft der normaler Verteilungsfunktion," *Math. Z.* **41** (1936), 405.

[14] Crow, J. F. and Kimura, M. *An Introduction to Population Genetics Theory*. Harper & Row, New York, 1970.

[15] Dynkin, E. B. *Markov Processes* I, II Springer Verlag, N. Y. (1965).

[16] Einstein, A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movements* Dover, New York, 1956.

[17] Eliezer, S. and Schuss, Z. "Stochastic (white noise) analysis of resonant absorption in laser generated plasma," *Phys. Lett. A* Vol. 70 **4** (1979), p. 307～310.

[18] Ewens, W. J. "Conditional diffusion process in population genetics," *Theor. Popul. Biol.* **4** (1973), 21～34.

[19] Feller, W. Diffusion processes in genetics. *Proc. 2nd Berkeley Symp.* (1951), 227～246.

[20] Feller, W. "The parabolic differential equation and the associated semi-groups of transformations," *Ann Math* **55** (1952), 468～519.

[21] Feller, W. "Diffusion processes in one dimension," *Trans. AMS*, **97** (1954), 1～31.

[22] Feller, W. "Generalized second order differential operators and their lateral conditions," *Ill. J. Math.* **1** (1957), 459～504.

[23] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vols. 1 and 2. Wiley, New York, 1971.

[24] Fisz, M. *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Wiley, New York, 1963.

[25] Friedman, A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[26] Friedman, A. "The asymptotic behavior of the first real eigenvalue of a second order elliptic operator with a small parameter in the highest derivatives," *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1973), 1005～1015.

[27] Friedman, A. *Stochastic Differential Equations*. Academic Press, New York, 1976.

[28] Friedman, A. and Schuss, Z. "Degenerate evolution equations in Hilbert space," *Trans. AMS*, **161** (1971), 401～427.

[29] Fürth, R. "Statistik und Wahrscheinlichkeits-nachwirkung," *Phys. Z.*, **19** (1918), 421～426.

[30] Gihman, I. I. and Skorokhod, A. V. *Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin, 1972.

[31] Girifalco, L. *Atomic Migration in Crystals*. Blaisdell, Waltham, Mass., 1964.

[32] Glasstone, S., Laidler, J. J., and Eyring, H. *The Theory of Rate Processes*. McGraw-Hill, New York, 1941.

[33] Glyde, H. R. "Rate processes in solids," *Rev. Mod. Phys.*, **39** (1967), 3.

[34] Hale, J. *Ordinary Differential Equation*. Wiley-Interscience, New York, 1969.

[35] Halmos. P. R. *Measure Theory*. D. Van Nostrand CO., Princeton, N. J., 1959.

[36] Holland, C. J. "The regular expansion in the Neuman problems for elliptic equations," *Commun. P. D. E.*, **1** (1976), 3, 191～213.

[37] Itô. K. and McKean, H. *Diffusion Processes and Their Sample Path*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[38] Jazwinski, A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, 1970.

[39] Kac, M. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*. Intersciences New York, 1959.

[40] Kamionomostskaya, S. "On equations of elliptic type and parabolic type with a small parameter in the highest derivative," *Math. Sch.*, **31** (73), 3(1952), 703～708.

[41] Kamienomostskaya, S. "The first boundary value problem for elliptic equations containing a small parameter," *Izv. Akad. Nauk. U. S. S. R.*, **19** (1955), 345～360.

[42] Kamin, S. "On elliptic perturbation of a first order operator with a singular point of attracting type." *Indiana Univ. Math. J.*, **27** (1978), 6, 935～951.

[43] Kamke, E. *Theory of Sets*, Dover, New York, 1950.

[44] Khasminskii, R. Z. "On diffusion processes with a small parameter," *Izv. Akad. Nauk. U. S. S. R. Sev. Mat.*, **27** (1963), 1280～1300.

[45] Khasminskii, R. Z. *Stability of Systems of Differential Equations with Random Parameters*. Nauk, Moscow, 1969.

[46] Khinchine, A. I. *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer-Verlag Berlin, 1933.

[47] Kramers, H. A. "Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions," *Physica*, **7** (1940), 284～304.

[48] Kushner, H. J. "On the dynamical equations of conditional probability density functions with applications to optimal stochastic control theory," *J. Math. Anal. Appl.*, **8** (1964), 332～344.

[49] Kushner, H. J. "On the weak convergence of interpolated Markov chains to a diffusion." *Ann. Probab.*, **2** (1974), 1, 40～50.

[50] Ladyzhenskaya, O. A. "Linear partial differential equations containing a small parameter multiplying derivatives of highest order." *Vestn. Leningr. Univ.*, **7** (1957), 104～120.

[51] Lamb, Sir H. *Hydrodynamics*. Dover, New York, 1945.

[52] Landau, L. and Lifshitz, E. *Mechanics*. Nauka, Moscow, 1954.

[53] Larsen, E. and D'Arruda, J. "Asymptotic theory of the linear transport equation for small mean free paths. I," *Phys. Rev. A.*, **13** (1976), 5, 1932～1939.

[54] Larsen, E. W. and Keller, J. B. "Asymptotic solution of neutron transport problems for small mean free paths," *J. Math. Phys.* **15** (1974), 75～81.

[55] Larsen, E. and Schuss, Z. "Diffusion tensor for atomic migration in crystals," *Phys. Rev. B.*, **18** (1978), 5, 2050～2058.

[56] Levikson, B. "The effect of random environments on the evolutionary process of gene frequencies——a mathematical analysis." Thesis, Tel Aviv University, 1974.

[57] Levikson, B. and Schuss, Z. "Nonhomogeneous diffusion approximation to a genetic model," *J. Math. Pures Appl.* **56** (1977), 55～65.

[58] Levinson, N. "The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+Au_x+Bu_y+Cu=D$ for small ε," *Ann. Math.*, **51** (1950), 2, 428～445.

[59] Lighthill, M. J. *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*. Cambridge University Press, New York, 1958.

[60] Lindsey, W. C. *Synchronization Systems in Communication and Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1972.

[61] Lions, J. L. *Perturbations Singulieres dans les Problemes aux Limites et en Controle Optimal* Springer Verlag, New York (1973).

[62] Livne, A. and Schuss, Z. "Singular perturbations for degenerate elliptic equations of second order," *Arch. Rat. Mech. Anal.* **52** (1973), 3, 233～243.

[63] Ludwig, D. *Stochastic Population Theories*. In *Lecture Notes in*

Biomathematics, Vol. 3. Springer-Verlag, New York, 1974.

[64] Ludwig, D. "Persistence of dynamical systems under random perturbations," *SIAM Rev.*, **17** (1975), 4, 605～640.

[65] McKean, H. P.,Jr *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York, 1969.

[66] Mandl, P. *Analytical Treatment of One Dimensional Markov Processes*. Springer-Verlag. New York, 1968.

[67] Mangel, M. and Ludwig, D. "Probability of extinction in a stochastic competition," *SIAM J. Appl. Math.*, **33** (1977), 92, 256～266.

[68] Matkowsky, B. "On boundary layer problems exhibiting resonance," *SIAM Rev.*, **17** (1975), 1, 82～100.

[69] Matkowsky, B. and Schuss, Z. "The exit problem for randomly perturbed dynamical systems," *SIAM J. Appl. Math.*, **33** (1977), 12, 365～382.

[70] Matkowsky, B. and Schuss, Z. "The eigenvalues of the Fokker-Planck operator and the approach to equilibrium for diffusions in potential fields," *SIAM J. Appl. Math.*, to appear.

[71] Miller, G. F. "The evolution of eigenvalues of a differential equation arising in a problem in genetics," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **58** (1962), 588～593.

[72] Mizel, V. J. "Boundary layer problems for an elliptic equation in a neighborhood of a singular point," *Proc. AMS*, **8** (1957), 62～67.

[73] Natanson, I. P. *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. 7 Ungar, New York, 1961.

[74] Oleinik, O. A. "Equations of elliptic type containing a small parameter," *Mat. Sb.* (73):1, **31** (1952), 104～118.

[75] Olver, F. W. J. "Asymptotic methods and singular perturbations," *SIAM-AMS Proc.*, **10** (1976), 105～117.

[76] O'Malley, R. E., Jr. *Introduction to Singular Perturbations*. Academic Press, New York, 1974.

[77] Ornstein, L. S. and Uhlenbeck, G. E. "On the theory of the Brownian motion," *Phys. Rev.*, **36** (1930), 1, 823～841.

[78] Papanicolaou, G. "Introduction to asymptotic analysis of stochastic equations," Lecture Notes, AMS Seminar, Renselaer Polytechnic Institute, Troy, N. Y., 1975.

[79] Schuss, Z. "Regularity theorems for solutions of a degenerate evolution equation," *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **46** (1972), 3, 200~211.

[80] Schuss, Z. "Degenerate and backward parabolic equations" *J. Appl. Anal.*, **7** (1977~1978), 111~119.

[81] Schuss, Z. "Singular perturbation methods in stochastic differential equations of mathematical physics," *SIAM Rev.*, **22** (1980), 2, 119~155.

[82] Schuss, Z. and Matkowsky, B. "The exit problem: a new approach to diffusion across potential barriers," *SIAM J. Appl. Math.*, **36** (1979), 43, 604~623.

[83] Smoluchowski, M. "Drei Vortrage uber Diffusion, Brownsche Beregung und Koagulation von Kolloidteilchen," *Phys. Z.*, **17** (1916), 557~585.

[84] Snyder, D. L. *The State-Variable Approach to Continuous Estimation with Applications to Analog Communication Theory*. M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1969.

[85] Stratonovich, R. L. *Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control*. Elsevier, New York, 1965.

[86] Svedberg, Th. *Z. Phys. Chem.*, **77** (1911), 177.

[87] Tausworth, R. "Simplified formula for mean cycle-slip time for phase locked loops with steady state error," *IEEE. Trans. Commun.* (1972), 331~337.

[88] Van Trees, H. L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory I, II*. Wiley, New York, 1970.

[89] Ventzel, A. D. and Freidlin, M. I. "On small random perturbations of dynamical systems," *Uspekhi Mat. Nauk.*, **25** (1970), 3~55.

[90] Vineyard, G. H. "Frequency factors and isotope effects in solid state rate processes," *J. Phys. Chem. Solids*, **3** (1957), 121~127.

[91] Vishik, M. I. and Lusternik, L. A. "Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter," *A. M. S. Transl*, **20** (1962), 2, 239~364.

[92] Viterbi, A. J. *Principles of Coherent Communications*. McGraw-Hill, New York, 1966.

[93] Watson, G. N. *Theory of Bessel Functions* (Cambridge 1922).

[94] Westgren, A. *Ark. Mat. Astron. Fys.* **11** (1916), 8, 14, and **13** (1918),

14.

[95] Wong, E. and Zakai, M. "On convergence of ordinary integral to stochastic integrals," *Ann. Math. Stat.*, **36** (1965), 1560~1564.

[96] Zadeh, L. A. and Desoer, C. A. *Linear System Theory, The State Space Approach* McGraw-Hill, New York, 1963.